교사용 지도서

고등학교

미적분 Ⅱ

신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

고등학교

미적분 Ⅱ

교사용 지도서

(주)지학사

머리말

현대 과학 문명은 미처 예상하지 못한 분야까지 급속도로 발전하고 있으며, 그 발전의 중심에는 언제나 수학이 자리해 왔습니다. 이러한 상황 가운데 수학 교육의 중요성은 더욱 부각되고 있습니다. 하지만 수학은 일반적으로 어려운 교과로 인식되기 때문에 하고자 하는 의욕이 있음에도 효율적인 학습이 이루어지지 않는 경향이 많습니다. 그 이유는 여러 가지가 있지만 다음과 같이 두 가지로 요약할 수 있습니다.

첫째, 방법론의 문제입니다. 수학은 어느 교과보다도 체계적이고 논리적이기 때문에 단계적인 학습을 통하여 단원 상호 간의 연계적 이해가 이루어져야 합니다. 또한 수학은 누적적인 학문입니다. 오늘날의 수학은 오래전부터 발견되고 발전해 온 수학을 기초로 이루어져 있으므로 이를 무시하면 수학 학습은 마치 사상누각이 되는 것입니다. 따라서 수학은 반드시 기초부터 시작해야 하고, 이를 바탕으로 체계적이고 논리적으로 확장해 나가야 합니다. 그러나 수학을 학습하는 데 이와 같은 수학의 특징을 중요하지 않게 여기는 경향이 있습니다.

둘째, 응용력의 문제입니다. 이미 언급했듯이 수학은 논리적인 전개를 바탕으로 합니다. 그러므로 체계적인 이해를 전제로 하지 않은 단순한 암기와 기계적인 응용은 심도 있는 수학 학습에 한계를 불러옵니다. 즉, 어떠한 문제가 주어졌을 때, 문제의 성격과 해결 과정에 대한 철저한 사고 없이 문제 유형과 공식을 대응하여 해결하려는 식의 요령은 오히려 다양한 문제에 적용하는 데 한계를 가져오고 수학 학습을 보다 어렵게 느끼게 합니다.

본 교사용 지도서는 위와 같은 점들을 고려하여 단원 간의 연계와 원리의 이해 및 적용에 중점을 두고 편찬하였습니다. 그리고 선생님께서 학생들에게 수학을 지도할 때, 학생들이 보다 흥미와 관심을 가지고 쉽게 이해할 수 있도록 교과서 체계에 맞추어 구성하였습니다. 아울러 교과서의 활용에 도움이 되는 사항들을 함께 수록하였으며, 구체적인 활용 방법은 따로 설명하였습니다.

교육 현장에 계신 선생님께서 본 교사용 지도서를 효율적으로 사용하여 보다 알찬 수학 교육의 결실을 거두기 바랍니다.

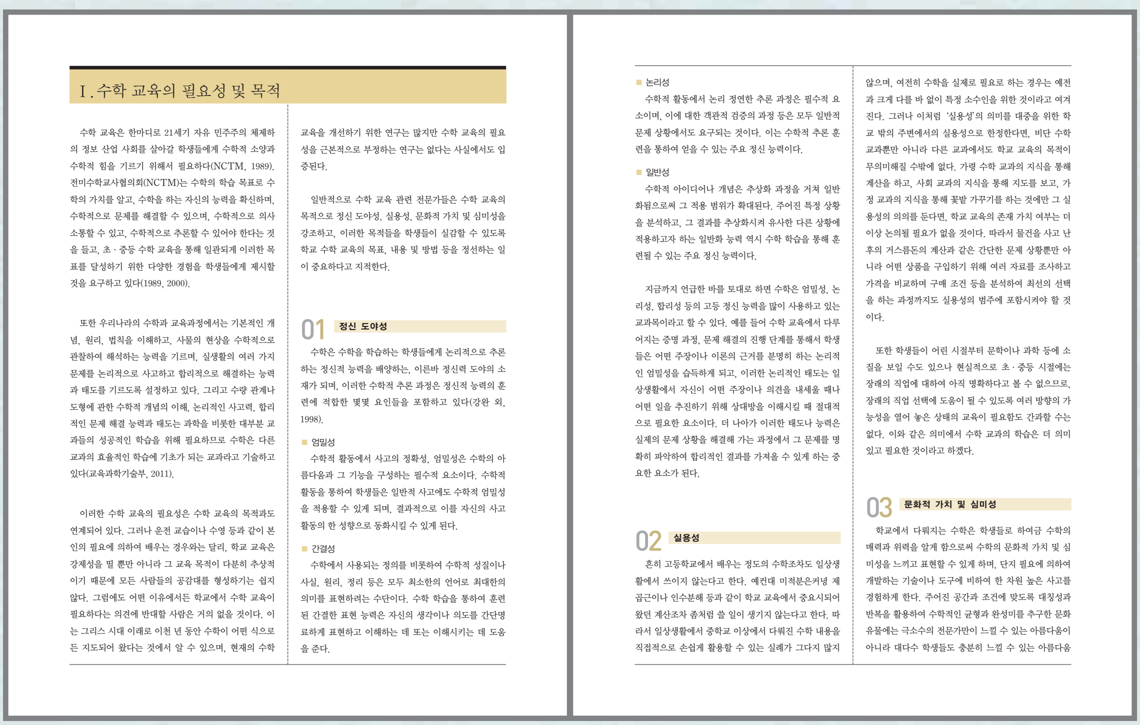
지은이 씀

구성과 특징

교사용 지도서는 크게 총론과 각론으로 나누어, 교사들의 전문성 신장에 도움을 줄 수 있는 내용과 교과서의 각 단원 지도에 유용한 자료들을 제공하였습니다.

총론

수학 교육의 필요성 및 목적, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해, 수학 교과서의 개발 동향, 수학적 문제 해결, 수학과 평가의 특징 및 방법, 좋은 수업의 의미, 수학과 수업 평가 등을 설명하였고, 교과서의 구성과 연간 지도 계획안을 제시하였습니다.



Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초·중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

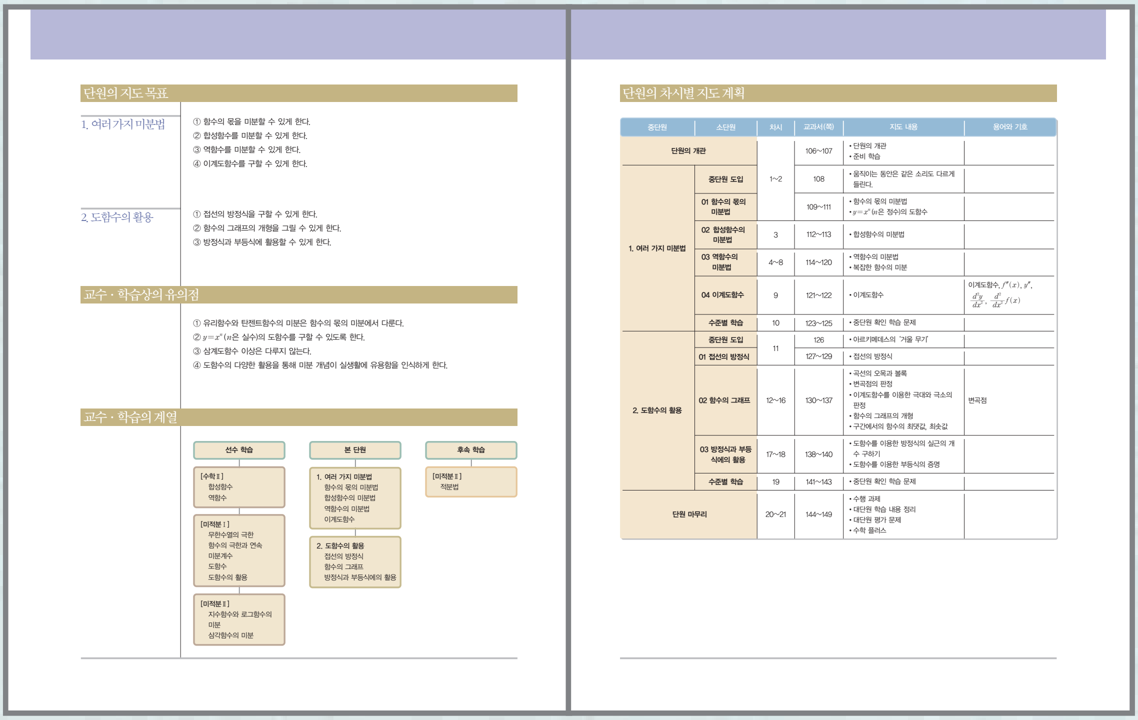
또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초·중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미 있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

각론

단원별 지도에 참고할 수 있는 지도 목표, 교수 · 학습상의 유의점, 지도 계획, 이론적 배경, 차시별 교수 · 학습 과정안(예시), 교과서 내용의 해설과 문제 풀이 및 교과서 내용 지도 시 유용한 자료들을 제시하였습니다.



단원의 지도 목표

1. 여러 가지 미분법
① 함수의 몫을 미분할 수 있게 한다.
② 합성함수를 미분할 수 있게 한다.
③ 역함수를 미분할 수 있게 한다.
④ 이계도함수를 구할 수 있게 한다.

2. 도함수의 활용
① 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.
③ 방정식과 부등식에 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 유리함수와 탄젠트함수의 미분은 함수의 몫의 미분에서 다룬다.
② $y=x^n$ (n은 실수)의 도함수를 구할 수 있도록 한다.
③ 삼계도함수 이상은 다루지 않는다.
④ 도함수의 다양한 활용을 통해 미분 개념이 실생활에 유용함을 인식하게 한다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습
[수학 Ⅱ] 합성함수, 역함수
[미적분 Ⅰ] 무한수열의 극한, 함수의 극한과 연속, 미분계수, 도함수, 도함수의 활용
[미적분 Ⅱ] 지수함수와 로그함수의 미분, 삼각함수의 미분

본 단원
1. 여러 가지 미분법: 함수의 몫의 미분법, 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법, 이계도함수
2. 도함수의 활용: 접선의 방정식, 함수의 그래프, 방정식과 부등식에의 활용

후속 학습
[미적분 Ⅱ] 적분법

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~2	106~107	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 여러 가지 미분법	중단원 도입		108	• 움직이는 동안은 같은 소리도 다르게 들린다.	
	01 함수의 몫의 미분법		109~111	• 함수의 몫의 미분법 • $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수	
	02 합성함수의 미분법	3	112~113	• 합성함수의 미분법	
	03 역함수의 미분법	4~8	114~120	• 역함수의 미분법 • 복잡한 함수의 미분	
	04 이계도함수	9	121~122	• 이계도함수	이계도함수, $f''(x)$, y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$
	수준별 학습	10	123~125	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 도함수의 활용	중단원 도입	11	126	• 아르키메데스의 '거울 무기'	
	01 접선의 방정식		127~129	• 접선의 방정식	
	02 함수의 그래프	12~16	130~137	• 곡선의 오목과 볼록 • 변곡점의 판정 • 이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정 • 함수의 그래프의 개형 • 구간에서의 함수의 최댓값, 최솟값	변곡점
	03 방정식과 부등식에의 활용	17~18	138~140	• 도함수를 이용한 방정식의 실근의 개수 구하기 • 도함수를 이용한 부등식의 증명	
	수준별 학습	19	141~143	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		20~21	144~149	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 지도 목표

교육과정에 명시된 대단원의 지도 목표를 중단원별로 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

대단원의 지도에 있어서 유의해야 할 사항 중 교육과정에 명시된 내용을 설명하였습니다.

교수 · 학습의 계열

단원과 관련하여 선수 학습과 후속 학습의 연계성을 제시하였습니다.

단원의 차시별 지도 계획

중단원과 소단원별 교과서 쪽수, 지도 내용, 교육과정에 명시된 용어와 기호 등을 쉽게 알아볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.

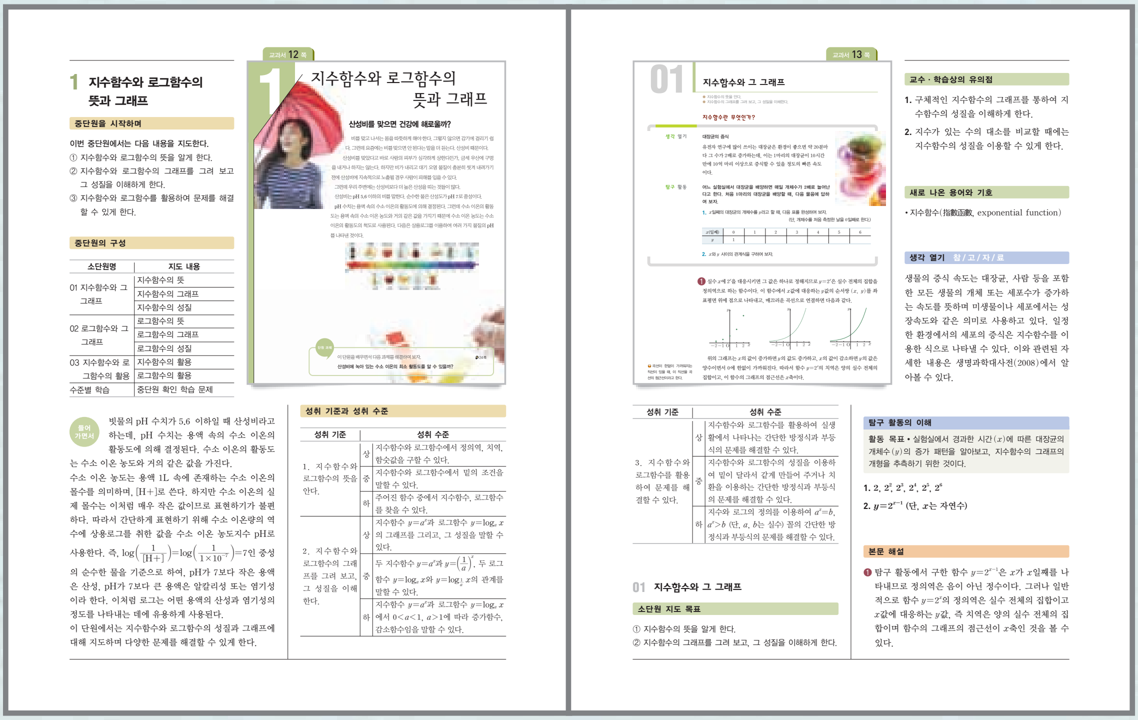
단원의 이론적 배경

단원의 이론적 배경과 이론이 발전되어 온 수학사적 배경을 설명하였습니다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

두 개의 차시에 해당하는 교수 · 학습 과정안을 예로 제시하였습니다.

구성과 특징



중단원을 시작하며

교육과정에 명시된 중단원의 지도 목표를 제시하였습니다.

중단원의 구성

중단원의 소단원명과 각 소단원의 지도 내용을 제시하였습니다.

들어가면서

중단원 도입에 소개된 실생활 소재와 단원과의 관련성을 설명하였습니다.

성취 기준과 성취 수준

교육과정에 제시된 단원의 성취 기준 및 상, 중, 하 수준별 성취 수준을 제시하였습니다.

소단원 지도 목표

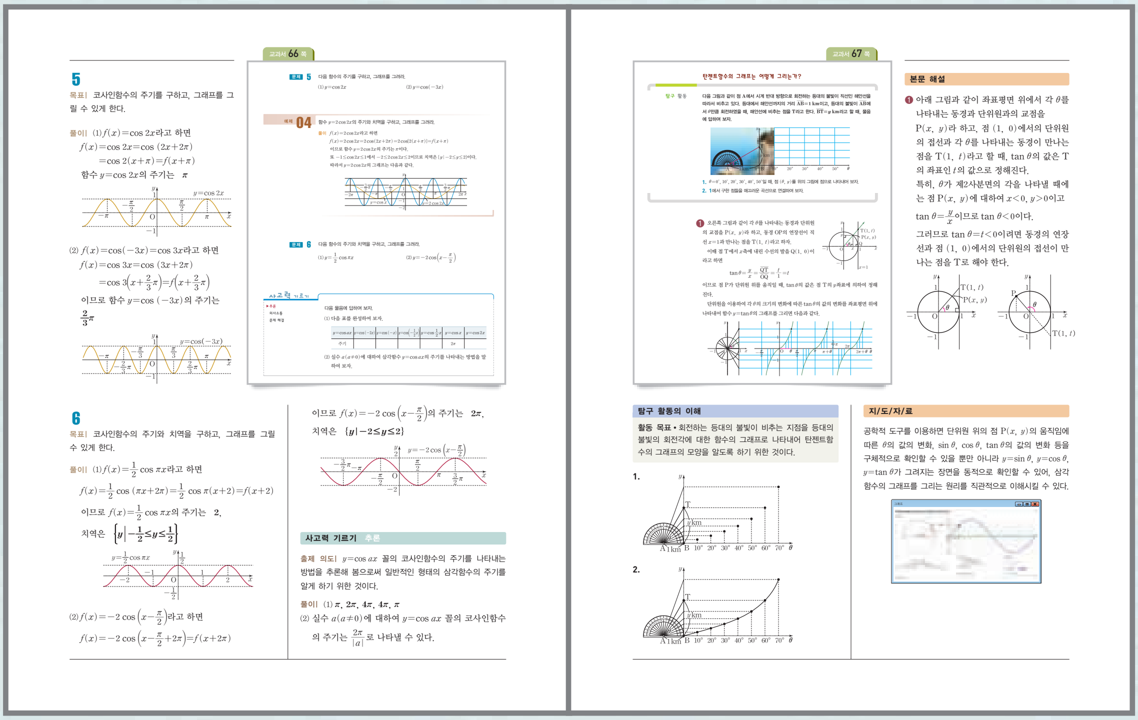
소단원별로 세부적이고 구체적인 지도 목표를 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

소단원의 지도에 있어서 특별히 유의해야 할 사항을 정리하였습니다.

새로 나온 용어와 기호

소단원에서 새로 배우게 될 교육과정에 명시된 용어와 기호를 제시하였습니다.



생각 열기 참고 자료

생각 열기와 관련된 내용에 대한 충분한 설명을 제시하였습니다.

탐구 활동의 이해

탐구 활동의 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

본문 해설

교과서에 제시된 학습 내용을 해설하고, 보다 자세한 설명을 덧붙였습니다.

지도 자료

내용 지도 시 필요한 보충 설명이나 기호에 대한 설명을 제시하였습니다.

읽기 자료

수학사, 생활 속 수학 등 각종 읽기 자료를 제시하였습니다.

문제의 해설

교과서 본문에 있는 모든 문제의 출제 의도 및 지도 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

수행 과제

수행 과제의 출제 의도와 구체적인 예시 답안을 제시하였습니다.

대단원 학습 내용 정리

단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하였습니다.

대단원 평가 문제

단원 마무리에 나온 대단원 평가 문제의 지도 목표 및 풀이를 제시하였습니다.

수학 플러스

단원과 관련된 수학, 과학, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 등의 이야기를 소개하였습니다.

그들과 이야기를 나누며
가장 크게 깨달은 것은 자기가 진정으로
하고 싶어하는 것이 무엇인지 깨닫는다면
그 일을 미래의 어느 날로 미루지 말고,
또 그 일을 할 수 없는 이유들을 찾지 말고
'바로 지금' 시작해야 한다는 것이다.
흘러가는 시간은 언젠가 이룰 꿈을 위해
마냥 기다려주지 않으니까.

- 용서해의 《삶의 마지막 축제》 중에서 -

차례

총론

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적	10
Ⅱ. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해	13
Ⅲ. 수학 교과서의 개발 동향	27
Ⅳ. 수학적 문제 해결	32
Ⅴ. 수학과 평가의 특징 및 방법	37
Ⅵ. 좋은 수업의 의미	50
Ⅶ. 수학과 수업 평가	55
Ⅷ. 교과서의 구성	62
Ⅸ. 연간 지도 계획안	64
Ⅹ. 참고 문헌	65

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초 · 중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초·중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미 있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

이 들어 있으며, 매우 간단한 수학적 원리를 활용하여 흥미진진한 게임을 하는 예에서도 그 심미적 가치를 쉽게 찾을 수 있다. 또한 수학의 아름다움이나 매력은 미적분의 기본 정리에서부터 신라 시대의 술병에 이르기까지 다양한 대상과 수준에서 발견될 수 있다. 이와 같은 풍부한 자료와 유연한 해석을 통하여 문화적 가치, 수학 고유의 심미성을 적절한 수준에서 확인하는 경험은 고등학교를 떠남과 동시에 수학과 멀어지는 대부분의 학생들에게 반드시 필요하다.

수학 교육에서 놓치지 말아야 하는 것은 모든 건전한 시민을 위한 공통적으로 기본적이면서도 필수적인 수학 내용이 무엇인가를 분명히 하는 것이다. 따라서 수학 교육은 모든 학생들에게 꼭 필요한 내용이 무엇인지 명확히 정할 필요가 있으며 그것이 다양한 상황과 측면에 적용되면서 철저히 그리고 깊이 있게 이해되도록 돕는 것이 필요할 것이다. 궁극적으로 교육의 목적은 학생의 잠재력을 계발하고, 건전한 사회인으로서의 역할을 수행하도록 돕는 데 있다. 다른 교과 교육이 그러하듯이 수학도 현대 사회와 미래 사회를 살아갈 건전한 시민으로서 그 사회를 지탱하는 문명적, 문화적 기저 중에서 수학을 기반으로 하는 것에 대하여 수학적으로 이해하는 눈을 기르기 위해 배우는 것이다.

결국 수학을 가르쳐야 하는 이유는 수학의 내용이 인간과 환경에 관한 각종 현상을 보는 안목과 수단을 제공해 주기 때문이다. 수학적 안목의 고양이라는 것은 수학의 실용성과도 연결될 수 있지만 그보다는 경제 · 사회 · 문화 등 제 분야에 녹아 있는 수학적 현상이나 원리 · 모델 등을 파악하여 이들 분야를 더욱 깊이 있고 창의적인 방법으로 이해할 수 있도록 하는 것을 의미한다. 또한 수학은 어떤 문제를 여러 가지 수학적 방법으로 해결하게 함으로써 문제 해결의 지혜를 기르고, 한 현상에 담긴 수학적 질서를 이해하기 위해 배우며, 사물의 법칙과 질서에 대한 수학적 이해력을 기르기 위해 배운다고도 할 수 있다. 즉, 조각상의 무게중심, 물건 구매, 유전자의 배열, 황금 비율, 투자에 따른 수익률, 건축, 디지털의 세계, 자동차의 속도와 회전 등 일상생활의 다양한 모습들을 수학적으로 이해하기 위해서 수학을 배우는 것이다(황혜정 외, 2012).

II. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해

2009년 12월 23일에 교육과정 총론이 발표됨에 따라 2011년 8월 9일, 2009 개정 교육과정에 따른 '수학과 교육과정'이 최종 확정 및 공표되었다. 이 교육과정은 2013년부터 현장에 적용되고 있으며, 이에 대한 개정 배경 및 방향, 창의성 강조를 위한 수학적 과정(mathematical process)의 반영, 교육과정 문서의 구성 및 체제, 학교급별 주요 내용 변화에 대해 간략히 살펴보면 다음과 같다.

01 개정의 기본 방향

새로운 수학과 교육과정에서는 우선적으로 2009 개정 교육과정 총론의 취지에 부합하고 기존 수학과 교육과정의 문제점을 극복할 수 있는 새로운 교육과정의 성격, 목표, 내용 등을 개발하는 데 주력하였다. 특히 미래 사회에서 요구되는 핵심 역량의 주요 요소인 창의 중심의 교육과정 운영 및 교과용 도서 구현이 가능하도록 이에 따른 교육 목표와 내용을 개발하는 데에 초점을 두었으며, 다음의 항목을 구현하고자 하는 것이 새로운 교육과정의 주요 개발 방향이다.

가. 수학 교과 내용의 양 20 % 경감

2009 개정 교육과정 총론의 '교육과정 편성 · 운영 지침'의 주요 변화 내용 중 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 대비 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 내용 20 % 경감의 배경이 될 수 있는 근거는 학교의 특성, 학생 · 교사 · 학부모의 요구 및 필요에 따라 학교가 자율적으로 교과(군)별 20 % 범위 내에서 시수를 증감하여 운영할 수 있는 데 있다(교육과학기술부, 2009). 2009 개정 교육과정 총론에서는 각 교과별로 교육과정의 성취 기준을 개발할 경우 학습량이 증가하여 교육 내용의 적정화를 저해할 우려가 있음을 염두에 두고, 교과별 교육과정 개발 시 현행 교육과정 대비 20 %의 내용이 경감되어야 함을 적극 주장하였다(박순경, 2010). 즉, 기준 수업 시수를 감안하되 교과 내용의 양은 현행 교육과정보다 20 % 정도 감축한다고 상정하고 최적한 학습 내용을 정선함으로써 보다 질 높은 교과 교육과정을 추구하도록 하였다.

나. 수학적 창의성 강조에 따른 수학적 과정

(1) 수학적 창의성의 의미

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 수학적 과제를 해결하는 과정에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 산출하거나 새로운 관점에서 과제를 탐구하고 지식을 구성하는 능력을 의미한다. 여기서 수학적 과제는 학생들의 수학적 능력 계발을 위한 내용적 배경을 제공하는 것으로서, 예를 들어 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 활동 등을 망라한 것이다.

이와 같은 수학적 창의성을 계발하기 위해서는 우선 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성해 주어야 한다. 이와 같은 학습 상황에서 학생들은 수학을 학습하고 행하는 과정에서 과제에 대한 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 과제 해결에 대한 집착성과 끈기 등과 같은 창의성의 정의적 측면도 발전시키게 될 것이다.

한편 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 학교 수준에서의 수학적 창의성을 의미하기 때문에, 학습자가 수학적 추론과 통찰을 활용하여 기존의 지식과 경험을 유의미한 방법으로 분석 · 연결 · 통합하는 과정에서 창의성이 발현된다고 본다. 또한 학교 수학을 통해서 수학적 창의성을 계발할 때에는 창의적인 사고와 관련되는 일련의 과정을 수학적으로 의사소통하고 표현하는 능력도 신장시켜야 할 것이다.

⑵ 수학적 과정의 의미 및 반영

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 말하는 '수학적 과정'은 수와 연산, 도형 등의 내용 영역에서 다루는 수학적 주제를 이해하고 습득하는 데에서, 그리고 그러한 수학적 주제를 활용하여 다양한 현상을 이해하고 문제를 해결하고 의사소통하는 데에서 활성화되어야 하는 능력을 의미한다. 다시 말해서 '수학적 과정'은 학생들 주변의 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결할 때 활성화되어야 하는 수학의 과정적 기능을 의미하며, '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통' 등을 구성 요소로 가지는 개념으로 정의하였다.

여기서 '수학적 문제 해결'은 수학의 문제나 문제적 상황에서 그 해를 찾아내기 위하여 이미 알고 있는 수학의 개념, 원리, 법칙 등의 지식이나 기능을 바탕으로 수학적 발견술이나 전략 등의 다양하면서 종합적인 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. '수학적 추론'은 수학적 현상이나 사실 등을 대상으로 그와 관련된 잠재적인 수학적 규칙성이나 원리, 구조 등에 결론적으로 이르기 위한 논리적 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. 그리고 '수학적 의사소통'은 수학의 아이디어나 생각 등을 수학적 표현 수단을 통하여 서로 공유하고 학습하게 되는 과정을 수행하는 것을 의미한다(NCTM, 2000).

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 구성 체제를 살펴보면, '목표', '내용', '교수 · 학습 방법', '평가' 등의 순으로 구성되어 있다. 학교에서 구체적으로 학습해야 할 수학 성취 기준은 '내용'에서 학년(군)별로 제시되어 있다. 한편 '수학적 과정'의 하위 구성 요소로 설정한 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'은 우리나라의 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되어 온 사항이다. 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서도 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통을 강조하고 있다.

학교의 수학 교수 · 학습의 실질적인 모습을 결정한다고 할 수 있는 교과서의 경우, 그 내용은 주로 수학과 교육과정의 '내용'에 제시되어 있는 성취 기준을 중심으로 구성된다. 현행 수학과 교육과정과 같이 '목표'와 '교수 · 학습 방법'에서 '수학적 과정'과 관련된 제 측면을 과거와 같이 선언적으로만 제시하는 것은, '수학적 과정'과 관련된 제 측면들이 교과서의 내용 구성에 배경으로서 암묵적으로 스며들게 되는 장점이 있다고 볼 수 있지만, 학생들에게 적극적이고 명확하게 지도되지 않는다는 한계점 또한 지니고 있다.

따라서 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 현행 수학과 교육과정의 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 선언적으로 제시되고 있는 '수학적 과정'의 제 측면들을 보다 구체적인 성취 기준을 가지고 '내용'의 진술에 포함시킴으로써 교과용 도서 및 수업 상황에서 수학적 과정과 관련된 제 측면들을 더욱 적극적이고 분명히 다루게 하고 있다. 한마디로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'을 '수학적 과정'으로 간주하고, 이를 학습 내용 성취 기준 및 교수 · 학습상의 유의점, 그리고 교수 · 학습 방법 등에 반영하였다.

수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통의 특징은 각각 다음과 같다.

〈표 Ⅱ-1〉 수학적 과정의 요소 및 특징

수학적 문제 해결
가. 주어진 문제의 해결에 필요한 정보를 확인 또는 보완하고 적절한 전략이나 사고 과정을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
나. 수학적인 방법으로 문제 해결의 과정과 결과의 타당성을 설명할 수 있다.
다. 문제 해결 과정이나 완결 후 문제 제기를 통하여 문제 해결을 발전적으로 이끌 수 있다.
라. 문제 해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제 상황에 적용할 수 있다.

수학적 추론
가. 수학적 추측이나 주장을 만들고, 수학적 지식에 근거하여 이를 정당화할 수 있다.
나. 수학적 아이디어나 사고 과정을 수학적인 방법으로 검증할 수 있다.
다. 수학적 활동에서 다양하고 독창적인 아이디어가 지니는 가치를 인식할 수 있다.
수학적 의사소통
가. 수학적인 방법을 활용하여 자신의 생각을 논리적으로 정확하게 표현하고, 다른 사람을 이해시킬 수 있다.
나. 수학적 활동 중에 자신의 수학적인 생각을 다른 사람과 주고받는 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통하여 자신의 생각을 개선시킬 수 있다.
다. 다른 사람의 수학적 아이디어나 사고 과정을 이해하고 평가할 수 있다.

(3) 학년군제 도입 및 적용

2009 개정 교육과정 총론의 초·중등학교 교육과정 구성의 방침에 의하면 "교육과정 편성·운영의 경직성을 탈피하고, 학년 간 상호 연계와 협력을 통한 학교 교육과정 편성·운영의 유연성을 부여하기 위하여 학년군을 설정한다."라고 규정하고 있다(교육과학기술부, 2009).

현재 2007 개정 교육과정 체제에서는 학년제를 따르고 있다. 즉, 각 학년에서 배워야 할 내용을 학년별로 제시하였다. 반면 학년군제는 학생들이 배워야 할 내용을 학년별이 아니라 몇 개 학년을 묶어서 제시한다. 예를 들어 초등학교 1학년에서 2학년 사이에 학습할 내용을 초등학교 1~2학년군으로 제시하는 것이다.

학년군제 도입에 따른 가장 큰 변화는 학생들의 수준별 학습이다. 학년군제를 실시하는 것은 학생들의 학습 수준의 차이를 인정하는 것이다. 이해가 빠른 학생들은 더 많은 내용을 혹은 더 깊은 내용을 학습할 수 있고, 이해가 느린 학생들은 기본적인 내용을 집중적으로 학습할 수 있다. 학생들은 자신의 흥미나 적성을 고려하여 필요한 수학 교과를 선택할 수 있으며, 이는 학생들의 진로 선택과 관련될 수 있다.

또 다른 변화는 학년군제에서는 다양한 교과서가 사용될 수 있다는 것이다. 교육과정에서 엄격한 학년의 구분이 없어지고 내용이 통합적으로 제시되기 때문에 관련 내용들을 여러 가지 방법으로 재배치할 수 있게 된다. 예를 들어 초등학교 1학년과 2학년에서 학습할 수와 연산 영역을 초등학교 1학년에서 집중적으로 학습하도록 하는 교과서를 구성할 수 있다. 또는 중학교에서 대수와 함수를 밀접하게 관련시켜서 교과서를 구성할 수 있다. 즉, 수학 교과가 가진 특성을 발휘하여 학생들의 창의력을 발달시킬 수 있는 다양한 교과서의 출현이 가능하게 된다.

그러나 학년군제에 따르는 단점들도 충분히 예상되기 때문에 학년군제를 실행하기 위해서는 다음과 같은 사항들에 대한 해결 방안이 모색되어야 한다.

첫째, 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다. 학년제 대신에 학년군제를 실시하는 취지 중의 하나는 학생들의 학습 수준 차를 인정하고 학생들의 수준에 맞는 학습을 통해서 사고 발달과 진로 선택에 긍정적인 효과를 주기 위함이다. 따라서 학생들의 수준에 적합한 수업이 가능한 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다.

둘째, 수준별 수업이 원활히 시행되기 위해서는 적절한 평가 기준이 마련되어야 한다. 학생들의 다양한 진로와 흥미를 고려하여 과목을 이수하고 이에 대한 타당한 평가가 이루어져야 한다.

셋째, 교육과정이 학년군으로 구성되더라도 학년별로 교과서가 어떻게 저술되어야 하는지에 대한 기준이 필요하다.

넷째, 전학생들을 위한 보충 학습 과정 등 교수·학습 방안 및 정책이 마련되어야 한다.

02 수학과 교육과정의 특징

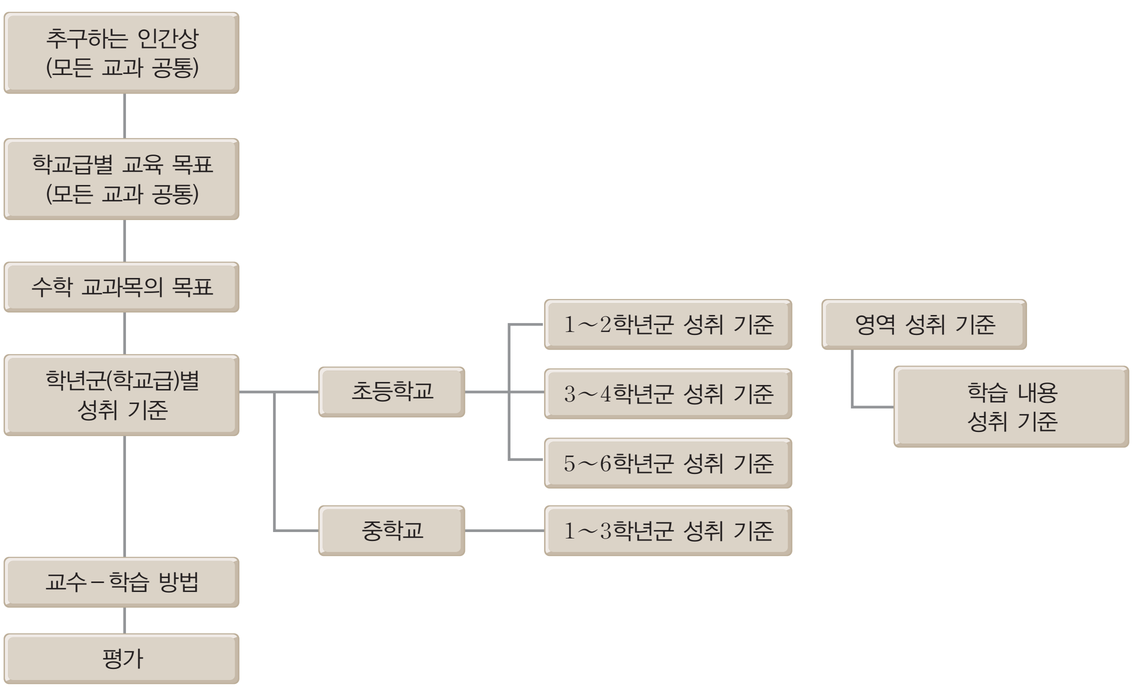
가. 교과목의 구성 및 문서 체제

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교과목은 공통 교육과정과 선택 교육과정으로 구성되어 있으며, 공통 교육과정에는 초등학교 1학년에서부터 중학교 3학년까지 다뤄지는 「수학」 교과목이 해당되며, 선택 교육과정에는 고등학교 1학년에서 3학년까지 다뤄지는 9개 교과목이 포함되어 있다. 선택 교육과정은 '기본 과목', '일반 과목', '심화 과목'으로 구성되어 있으며, 일반 과목은 모두 5단위의 6개 선택 과목으로 「수학 Ⅰ」, 「수학 Ⅱ」, 「확률과 통계」, 「미적분 Ⅰ」, 「미적분 Ⅱ」, 「기하와 벡터」로 구성되어 있다. 그 밖에 기본 과목에는 「기초 수학」, 심화 과목에는 「고급 수학 Ⅰ」과 「고급 수학 Ⅱ」가 포함된다.

공통 교육과정		
1. 수학		
선택 교육과정		
〈기본 과목〉	〈일반 과목〉	〈심화 과목〉
1. 기초 수학	1. 수학 Ⅰ 2. 수학 Ⅱ 3. 확률과 통계 4. 미적분 Ⅰ 5. 미적분 Ⅱ 6. 기하와 벡터	1. 고급 수학 Ⅰ 2. 고급 수학 Ⅱ

[그림 Ⅱ-1] 수학과 교육과정의 교과목 구성

공통 교육과정 기간에 다뤄지는 수학 교과목의 문서 체제를 예로 들어 도식화하면 다음과 같으며, 선택 교육과정 기간의 9개 교과목의 문서 체제도 이와 동일한 방식으로 구성되어 있다. 여기서 각 교과목의 '3. 목표'는 2007 개정 교육과정의 '1. 성격'과 '2. 목표'의 두 부문의 진술을 통합하여 진술하고 있다. 특히 「수학」 교과목의 목표의 경우, 예전에 분리하여 제시되어 있던 초등학교와 중학교의 교육 목표가 통합, 진술되었다.



[그림 Ⅱ-2] 수학 교과목의 목표 및 성취 기준

나. 영역 구분의 변경

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 제7차 개정의 것과 마찬가지로, 학교급별 특성을 감안하여 초등학교와 중학교 각각의 내용 영역을 구분하였으며, 초등학교의 경우 '규칙성과 문제 해결' 영역을 '규칙성'으로 변경하였다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 모든 학교급 및 모든 수학 교과목에 걸쳐 수학적 과정의 요소로서 문제 해결 활동을 전 영역 및 세부 내용에 걸쳐 적극 반영하도록 강조하고 있기 때문이다.

2007 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중·고등학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	확률과 통계		확률과 통계
	규칙성과 문제 해결		기하

2009 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	규칙성		확률과 통계
	확률과 통계		기하

[그림 Ⅱ-3] 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 영역명

03 학교급별 내용 변화

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 학교급별, 학년군별 내용의 변화는 기본적으로 학교 현장에서의 창의성 활동을 실제적이고 효율적으로 실행하기 위한 것으로, 학습 내용의 적정화 및 학년별 내용 분량이 조정되었다. 수학과 교육과정의 총 10개 교과목에 대한 주요 변화 내용을 학교급별로 살펴보면 다음과 같다.

가. 초등학교

(1) 수와 연산

초등학교의 수와 연산 영역에서 가장 큰 변화로는 자연수 및 분수의 지도 시기를 재조정하고, 계산 연습을 통한 단순한 연산 기능 신장이 아니라 연산 감각 및 양적 추론 능력을 강화한 점을 들 수 있다. 또한 사칙연산의 계산 결과를 어림한 후 어림한 값을 확인하거나 소수의 복잡한 계산에 있어서 계산기를 도입하여 활용할 수 있게 함으로써, 지나친 계산 연습에서 기인하는 학습 부담을 경감하고자 하였다.

(2) 도형

2007 개정 교육과정에서 평면도형의 각 구성 요소에 대한 학습 후 도형의 언어적이고 명시적인 정의를 통해서 도형 개념을 도입하는 방식을 대신하여, 2009 개정 교육과정에서는 도형의 모양 인식 및 분류 활동을 토대로 하여 도형 및 그 구성 요소에 대한 직관적인 이해와 더불어 이름을 먼저 학습한 후 점차 분석적, 명시적으로 도형의 개념 및 성질을 학습할 기회를 제공하였다. 한편 2007 개정 교육과정에서 분산되어 지도되었던 각, 삼각형, 사각형 관련 단원의 내용들을 각각 통합적으로 취급함으로써 학생들의 개념 구조의 체계적 형성을 돕고자 하였다. 또 초등학생의 인지 수준에 적합하지 않은 내용으로 간주되는 사각형의 포함 관계나 수학 학습의 계열상 초등 수학에서 다루는 것이 적합하지 않은 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 및 회전체를 삭제하였다.

(3) 측정

측정 영역은 실생활과 밀접하게 관련되어 있으므로, 실생활과 관련지어 측정의 필요성을 인식하게 하고 측정 및 어림 활동을 통하여 양감을 기르는 데 중점을 두었다. 측정 영역에서의 계산은 측정 결과 간의 단순 연산이나 단위 환산은 축소하고, 측정의 관점에 중점을 두도록 하였다. 길이, 무게, 들이, 넓이의 양감을 기르는 데 중점을 두고, 측정 영역에서 합과 차를 계산하거나 단순한 단위 환산 연습은 약화하였으며, 들이 및 무게의 덧셈과 뺄셈은 실생활 문제 상황을 통하여 다루도록 하였다. 또한 부피의 양감을 강조하고 부피의 단위 사이의 환산이나 부피와 들이의 단위 환산은 삭제하여 학습량을 감축하였다.

(4) 규칙성

2007 개정 교육과정에서 '규칙성과 문제 해결' 영역은 주로 문제 해결 방법, 규칙 찾기, 비와 비율, 비례 등을 포괄하였다. 2009 개정 교육과정에서는 '문제 해결'이 다른 영역의 내용적 성격과 달리 과정적 성격을 띠고 있으며 수학 교과 전 영역에서 고루 지도되어야 한다는 취지에서 '문제 해결' 부분은 전 영역으로 재편하고, 영역명은 '규칙성'으로 설정하였다. 규칙성 영역의 주요 변화로는 각 학년에 분산되어 있던 규칙 찾기 활동을 통합하고 탐구 활동 및 놀이를 활용하고자 하였다. 비율 중 할, 푼, 리나 연비는 그 중요도 및 쓰임새를 재고하여 삭제하였으며, 방정식은 중학교의 학습 내용과 중복하여 다루어지고 있으므로 초등학교에서는 삭제하고 중학교의 '일차방정식'으로 이동 통합함으로써 학습량을 감축하였다.

(5) 확률과 통계

확률과 통계 영역에서의 가장 큰 변화는 줄기와 잎 그림, 경우의 수와 확률을 중학교로 이동 통합하고, 초등학교에 가능성의 개념을 도입한 것이다. 줄기와 잎 그림은 학습량 감축 및 학문 내에서의 개념 간 관련성을 고려하여 중학교의 통계 영역과 의미 있게 연결되도록 상향 이동하였다. 또한 경우의 수와 확률은 초등학교와 중학교에서 내용 중복 및 학습량 감축의 취지에서 중학교로 이동 통합하였고, 확률 개념의 계열적 구성이라는 측면에서 가능성이라는 개념을 초등학교 5~6학년군에 도입하였다.

이상으로 초등학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 시간의 덧셈과 뺄셈 약화 (3～4학년군)
- 사각형의 포함 관계 삭제 (3～4학년군)
- 할, 푼, 리 삭제 (5～6학년군)
- 등식의 성질 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 방정식 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 연비의 삭제 (5～6학년군)
- 겉넓이와 부피 통합 및 부피와 들이 사이의 관계 삭제 (5～6학년군)
- 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 삭제 (5～6학년군)
- 회전체 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 가능성 도입 및 확률 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 줄기와 잎 그림 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동

나. 중학교

(1) 수와 연산

수는 수학에서 다루는 대상 중에서 가장 기본이 되는 개념으로서 수의 개념과 연산에 대한 이해는 실생활뿐 아니라 다른 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는 데 필수적이다. 따라서 수와 연산 영역은 수의 개념과 연산에 대한 이해를 높이고 이후의 학습과 연계될 수 있는 필수적인 요소만을 선정하였다. 또한 집합은 고등학교로 상향 이동하였고, 근삿값은 삭제하였다.

(2) 문자와 식

문자는 생활 주변이나 자연 및 사회 현상을 수학적으로 간단하게 표현하고 의사소통을 원활히 할 수 있게 해준다. 문자와 식 영역에서는 학생들이 자연스럽게 문자를 사용할 수 있도록 문자와 식을 실생활 문제 해결의 맥

락에서 다루게 하고, 수학이 현실 세계의 상황과 밀접한 관련이 있다는 것을 학생들에게 인식시켜야 한다. 이를 위해 방정식, 부등식과 그의 활용은 독립적인 중영역이 아닌 하나의 영역에서 통합하여 학습하도록 구성하였다. 또한 방정식과 부등식의 학습에 있어서 용어 사용에 대한 학습자의 부담을 고려하여 필요 이상의 용어 정의를 제한하였다.

⑶ 함수

2007 개정 교육과정에서는 제7차 교육과정에서 정비례와 반비례를 통해 함수 개념을 도입하면서 발생했던 문제점을 보완하기 위해, 정비례와 반비례를 초등학교 6학년으로 이동시키고 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계'로 도입하고, 실생활을 활용하여 함수 개념의 효용성을 알게 하는 것이 필요하다고 하였다(교육과학기술부, 2007). 이런 점에서 볼 때 중학교 수준의 함수 영역은 현실 세계의 상황을 이해하는 도구로서의 함수 개념에 초점을 맞추고, 고등학교 함수에서 여러 영역을 통합하는 아이디어로서 대응의 관점에서 정의된 형식화된 함수 개념으로 확장될 수 있는 기반이 되도록 하는 것이 바람직하다. 이에 2009 개정 교육과정에서는 함수 개념의 도입 방법의 변화를 도모하고, 정의역, 공역, 치역 등의 용어를 삭제하였다.

⑷ 확률과 통계

확률과 통계는 중학교 수학에서 실생활과 관련성이 매우 깊은 영역이다. 중학교에서는 자료의 정리와 표, 그래프의 해석, 통계적 확률과 수학적 확률의 관계, 확률의 계산, 대푯값과 산포도의 내용이 다루어진다. 본 개정안에서는 학생들이 통계를 학습함으로써 분석적이고 비판적인 사고를 도모할 수 있도록 내용의 변화는 최소화하면서, 교수 · 학습 방법의 변화를 도모하였다. 2007 개정 교육과정과 달라진 내용은 학습량 감축을 위해 '누적도수의 분포'를 삭제하고, 탐색적 자료 분석의 한 방법인 '줄기와 잎 그림'을 도수분포와 그래프 학습 내용에 추가한 것이다.

⑸ 기하

수학 교육에서 증명은 전통적으로 학생들에게 꼭 가르쳐야 하는 주요 대상으로 인식되어 왔다(NCTM, 2000). 그러나 중학교 수학에서의 증명 교육은 기대하는 만큼의 효과를 거두지 못하고 있음이 알려져 있다. 그 이유는 학생들이 기하에서 다루는 개념에 대한 지식이 부족한 탓도 있겠지만, 공리 체계 내에서 논리 규칙에 따라 명제들을 체계적으로 연결시키는 데 어려움을 느끼기 때문이다.

2009 개정 교육과정에서 기하 영역은 학생들이 도형을 탐구하여 기하학적 성질을 이해하고 이를 통해 추론 능력을 신장시키는 것을 목표로 한다. 또한 기하학적 성질을 이해하고 그 지식을 습득하는 방법에 있어서 학생 활동을 중시하고 증명 대신 추측 활동을 강조한다. 이를 위하여 다음 표에서와 같이 2009 개정 교육과정에서는 '증명할 수 있다' 대신 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시하였다.

〈표 Ⅱ-2〉 '추측과 정당화' 강조에 대한 내용 비교

2007 개정 교육과정	2009 개정 교육과정
5 삼각형과 사각형의 성질(2학년) ① 명제의 뜻과 증명의 의미를 이해한다. ② 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명할 수 있다.	5 삼각형과 사각형의 성질 ① 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ③ 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

2009 개정 교육과정에 제시한 '이해하고 설명할 수 있다'는 '정당화(justification)'를 의미하는데, 이는 자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도를 말한다. 이 시도는 일정 수준의 객관성을 담보할 수 있어야 한다. 인식론의 관점에서 정당화는 실험에 의한 정당화, 증거에 의한 정당화, 그리고 논리에 의한 수학적 증명 등으로 대변할 수 있다(http://www.wikipedia.org). 이때 수학적 증명은 논리적 연역법을 의미한다. 기하 교육에서의 증명은 기하 지식을 증거로 삼으며 논리적 형식을 갖춘 정당화를 의미한다(신이섭 외, 2011).

정당화를 유도하는 교수 방법은 다양한 형태로 나타날 수 있다. 예를 들면 학생들의 이해 수준에 합당한 간단한 논리 증명(연역 추론), 계산에 입각한 문제 해결(계산 증명), 그리고 귀납 추론 등이 포함된다. 정당화 교육을 중심으로 한 기하 교육은 기본적으로 학생의 활동에 의존한다. 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측과 정당화 활동을 강조하여, 증명을 하기 위해 익숙해져야 하는 용어와 기호의 사용이나 형식 논리 규칙의 이용에서 생기는 어려움을 줄이고 학생의 기하 지식에 기초한 추론 활동을 강화하는 것이다.

이와 같이 기하 교육에서 객관적 사실의 확인 과정인 논리 증명을 정당화 수준으로 확대함으로써, 논리 형식만을 다루는 것이 아니라 학생들의 인지 수준과 흥미를 고려한 추론 기회를 폭넓게 제공하려 하였다. 이러한 활동은 기하에 대한 이해와 반성적 사고뿐만 아니라 의사소통 능력의 향상에도 도움이 될 것이다.

한마디로 중학교의 기하 영역에서는 학생 활동이 중심이 되는 학생 주도적 수업을 강조하며 형식적 증명보다는 학생의 이해 수준에 입각한 '정당화' 수준의 교육을 지향하고자 하였다. 또한 2007 개정 교육과정의 단발성 주제와 상대적으로 의미가 적은 용어들을 삭제하고, '원과 직선', '원주각' 두 영역을 원의 성질로 묶어 하나의 영역으로 내용을 축소시켜 다루는 등, 전체적으로 학습량을 경감하였다.

이상으로 중학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 집합 삭제
- 근삿값 삭제
- 십진법과 이진법 삭제
- 수학 개념과 실생활 활용의 통합
- 방정식 관련 용어 약화
- 함수 개념 도입 방법의 변화
- 정의역, 공역, 치역 용어 삭제
- 통계 교수 · 학습 방법의 변화
- 누적도수의 분포 삭제
- 줄기와 잎 그림 추가
- 정당화에 의한 기하 교육 강조
- 작도와 합동, 평면도형의 성질 내용 축소
- 원의 성질 내용 축소

다. 고등학교

(1) 일반 과목

고등학교의 일반 과목에 해당하는 6개 교과목의 주요 변화 내용을 개략적으로 살펴보면 다음과 같다.

■ 수학 I

「수학 I」은 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 가장 기초가 되는 과목이다.

「수학 I」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '수와 연산', '문자와 식', '기하' 영역의 일부를 재구성한 것으로 크게 '다항식', '방정식과 부등식', '도형의 방정식'의 3개 영역으로 구성된다. '다항식' 영역에서는 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해를, '방정식과 부등식' 영역에서는 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식, 여러 가지 부등식을 다룬다.

「수학 I」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교

하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 실수 삭제
- 복소수와 이차방정식의 연계 강화
- 다항식의 약수와 배수 약화
- 이차방정식, 이차부등식, 이차함수의 통합 및 연계성 강화

■ 수학 II

「수학 Ⅱ」는 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」과 「수학 Ⅰ」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 「수학 Ⅰ」과 함께 기초가 되는 과목이다.

「수학 Ⅱ」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '집합과 명제'와 '함수' 영역의 내용, [수학 Ⅰ]의 내용 중 '수열' 영역과 '지수함수와 로그함수'의 내용 중 일부를 재구성한 것으로 크게 '집합과 명제', '함수', '수열', '지수와 로그'의 4개 영역으로 구성된다. '집합과 명제' 영역에서 집합, 명제를, '함수' 영역에서 함수, 유리함수와 무리함수를, '수열' 영역에서 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법을, '지수와 로그' 영역에서 지수, 로그를 다룬다.

「수학 Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 집합 내용 통합
- 명제 내용 보완 및 증명 부분 강화
- 함수 영역의 내용 약화
- 수열의 약화 및 이동
- 지수와 로그 내용 약화 및 이동

■ 확률과 통계

「확률과 통계」는 「수학 Ⅰ」과 「수학 Ⅱ」를 이수한 후 또는 「미적분 Ⅰ」까지 이수한 학생이 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 또는 자연 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「확률과 통계」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 고등학교 [수학]의 '확률과 통계' 영역, 선택 과목인 [미적분과 통계 기본]과 [적분과 통계]의 '확률', '통계' 영역, 그리고 [적분과 통계]의 '순열과 조합' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '순열과 조합', '확률', '통계'의 3개 영역으로 구성된다. '순열과 조합' 영역에서 경우의 수, 순열과 조합, 분할, 이항정리를, '확률' 영역에서 확률의 뜻과 활용, 조건부확률을 '통계' 영역에서 확률분포, 통계적 추정을 다룬다.

「확률과 통계」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 순열과 조합 관련 내용 통합 및 추가
- 연속확률변수의 평균과 표준편차 삭제
- 공학적 도구의 활용 강조

■ 미적분 I

「미적분 Ⅰ」은 「수학 Ⅰ」과 「수학 Ⅱ」를 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「미적분 Ⅰ」은 2007 개정 교육과정에서 [수학 Ⅰ]의 '수열의 극한' 영역과 [미적분과 통계 기본]의 '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법' 영역의 내용을 기본으로 하고 [수학 Ⅱ]의 '미분법' 영역의 내용 중 '롤의 정리, 평균값 정리의 이해와 활용'에 대한 내용을 추가하여 '수열의 극한', '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법'의 4개의 대영역으로 구성된다. '수열의 극한' 영역에서 수열의 극한, 급수를, '함수의 극한과 연속'에서 함수의 극한, 함수의 연속을, '다항함수의 미분법' 영역에서 미분계수, 도함수, 도함수의 활용을, '다항함수의 적분법' 영역에서 부정적분, 정적분, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분 Ⅰ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 수열의 극한의 이동 통합
- 롤의 정리와 평균값 정리의 이동
- 도함수의 활용 영역의 교수 · 학습상의 유의점 보완 및 삭제
- 용어 수정(중간값 정리를 사이값 정리로 수정)

■ 미적분II

「미적분Ⅱ」는「미적분Ⅰ」을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「미적분Ⅱ」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 [수학]의 '함수' 영역, [수학Ⅰ]의 '지수함수와 로그함수' 영역, [수학Ⅱ]의 '삼각함수', '함수의 극한과 연속'과 '미분법' 영역, [적분과 통계]의 '적분법' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '지수함수와 로그함수', '삼각함수', '미분법', '적분법'의 4개 영역으로 구성된다. '지수함수와 로그함수' 영역에서 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프, 지수함수와 로그함수의 미분을, '삼각함수' 영역에서 삼각함수의 뜻과 그래프, 삼각함수의 미분을, '미분법' 영역에서 여러 가지 미분법, 도함수의 활용을, '적분법' 영역에서 여러 가지 적분법, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 지수함수와 로그함수 통합 및 약화
- 삼각함수 통합 및 약화
- 미분법 및 적분법의 내용 조정

■ 기하와 벡터

「기하와 벡터」는 '미분과 적분'을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「기하와 벡터」는 2007 개정 교육과정에서 [수학Ⅱ]의 '미분법' 영역과 [적분과 통계]의 '적분법' 영역, 그리고 [기하와 벡터]의 '이차곡선', 공간도형과 공간좌표', '벡터' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '평면 곡선', '평면벡터', '공간도형과 공간벡터'의 3개 영역으로 구성된다. '평면 곡선' 영역에서 이차곡선, 평면 곡선의 접선을, '평면벡터' 영역에서 벡터의 연산, 평면벡터의 성분과 내적, 평면 운동을, '공간도형과 공간벡터' 영역에서 공간도형, 공간좌표, 공간벡터를 다룬다.

「기하와 벡터」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 미분법을 이용한 평면 곡선의 이해 강화
- 위치벡터를 이용한 평면 운동의 이해 강화

(2) 기본 및 심화 과목

고등학교의 경우에는 일반 과목에 해당하는 6개 교과목 이외에, 기본 과목인「기초 수학」과 심화 과목인「고급 수학Ⅰ」,「고급 수학Ⅱ」가 새로 신설되었다.

「기초 수학」은 중학교 수학의 내용을 잘 이해하지 못한 학생이 일반 과목의 수학 교과를 이수하기 위해 필요한 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다.

「기초 수학」의 내용은 '수와 식의 계산', '방정식과 함수', '피타고라스 정리와 삼각비'로 구성된다. '수와 식의 계산' 영역에서는 수의 연산, 문자의 사용과 식의 계산, 다항식의 계산을, '방정식과 함수' 영역에서는 일차방정식과 일차함수, 이차방정식과 이차함수를, '피타고라스 정리와 삼각비' 영역에서는 피타고라스 정리, 삼각비를 다룬다.

「고급 수학Ⅰ」과「고급 수학Ⅱ」는 심화 과목으로 일반 과목에서 학습한 수학의 기본 지식과 기능을 바탕으로 심화된 수준의 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하고, 수학적 사고력, 창의적 사고력, 문제 해결력 등을 신장시킬 수 있도록 하는 과목이다.「고급 수학Ⅰ」과「고급 수학Ⅱ」는 심화된 수학적 지식과 사고 방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연과학 및 공학 분야뿐만 아니라 사회과학의 학습에 기초를 제공한다.

「고급 수학Ⅰ」의 내용은 '벡터와 행렬', '일차변환', '그래프'로 구성된다. '벡터와 행렬' 영역에서는 벡터, 행렬과 연립일차방정식을, '일차변환' 영역에서는 일차변환과 행렬, 고윳값과 행렬의 거듭제곱을, '그래프' 영역에서는 그래프의 뜻, 여러 가지 그래프, 그래프의 활용을 다룬다.「고급 수학Ⅱ」의 내용은 '복소수와 극좌표', '미적분의 활용', '편미분'으로 구성된다. '복소수와 극좌

표’ 영역에서는 복소수의 극형식, 극좌표와 극방정식을, ‘미적분의 활용’ 영역에서는 미분의 활용, 미분방정식, 적분의 활용을, ‘편미분’ 영역에서는 이변수함수의 뜻, 극한과 연속, 편미분, 편미분의 활용을 다룬다.

04 내용 체계

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 ‘수학’ 교과목(초등학교 1학년~중학교 3학년)의 내용 체계는 다음과 같다.

영역 \ 학교급 / 학년군	초등학교		
	1~2학년군	3~4학년군	5~6학년군
수와 연산	• 네 자리 이하의 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈	• 다섯 자리 이상의 수 • 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈 • 나눗셈 • 자연수의 혼합 계산 • 분수 • 소수 • 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈	• 약수와 배수 • 분수의 덧셈과 뺄셈 • 분수의 곱셈과 나눗셈 • 소수의 곱셈과 나눗셈 • 분수와 소수
도형	• 입체도형의 모양 • 평면도형의 모양 • 평면도형과 그 구성 요소	• 도형의 기초 • 평면도형의 이동 • 원의 구성 요소 • 여러 가지 삼각형 • 여러 가지 사각형 • 다각형	• 합동과 대칭 • 직육면체와 정육면체 • 각기둥과 각뿔 • 원기둥과 원뿔 • 입체도형의 공간감각
측정	• 양의 비교 • 시각 읽기 • 시각과 시간 • 길이	• 시간 • 길이 • 들이 • 무게 • 각도 • 어림하기(반올림, 올림, 버림) • 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만)	• 평면도형의 둘레와 넓이 • 무게와 넓이의 여러 가지 단위 • 원주율과 원의 넓이 • 겉넓이와 부피
규칙성	• 규칙 찾기	• 규칙 찾기 • 규칙과 대응	• 비와 비율 • 비례식과 비례배분 • 정비례와 반비례
확률과 통계	• 분류하기 • 표 만들기 • 그래프 그리기	• 자료의 정리 • 막대그래프와 꺾은선그래프	• 가능성과 평균 • 자료의 표현 • 비율그래프(띠그래프, 원그래프)

영역 \ 학교급 / 학년군	중학교		
	1~3학년군		
수와 연산	• 소인수분해 • 최대공약수, 최소공배수 • 정수와 유리수의 개념, 대소 관계, 사칙계산	• 순환소수 • 유리수와 순환소수의 관계	• 제곱근의 뜻과 성질 • 무리수 • 실수의 대소 관계 • 근호를 포함한 식의 사칙계산
문자와 식	• 문자의 사용 • 식의 값 • 일차식의 덧셈과 뺄셈 • 일차방정식	• 지수법칙 • 다항식의 덧셈과 뺄셈 • 다항식의 곱셈과 곱셈 공식 • 다항식의 나눗셈 • 등식의 변형 • 연립일차방정식 • 부등식의 성질과 일차부등식 • 연립일차부등식	• 인수분해 • 이차방정식
함수	• 함수의 개념 • 순서쌍과 좌표 • 함수의 그래프	• 일차함수의 의미와 그래프 • 일차함수의 활용 • 일차함수와 일차방정식의 관계	• 이차함수의 의미 • 이차함수의 그래프의 성질
확률과 통계	• 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형 • 도수분포표에서의 평균 • 상대도수의 분포	• 경우의 수 • 확률의 뜻과 기본 성질 • 확률의 계산	• 중앙값, 최빈값, 평균 • 분산, 표준편차
기하	• 점, 선, 면, 각 • 점, 직선, 평면 사이의 위치 관계 • 평행선의 성질 • 삼각형의 작도 • 삼각형의 합동조건 • 다각형의 성질 • 부채꼴에서 중심각과 호의 관계 • 부채꼴에서 호의 길이와 넓이 • 다면체, 회전체의 성질 • 입체도형의 겉넓이와 부피	• 이등변삼각형의 성질 • 삼각형의 외심, 내심 • 사각형의 성질 • 닮은 도형의 성질 • 삼각형의 닮음조건 • 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비 • 닮은 도형의 성질 활용	• 피타고라스 정리 • 삼각비 • 원의 현, 접선에 대한 성질 • 원주각의 성질

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '수학' 교과목 이외에 고등학교 선택 교과목의 내용 체계는 다음과 같다.

〈기본 과목〉

■ 기초 수학

영역	내용
수와 식의 계산	• 수의 연산 • 문자의 사용과 식의 계산 • 다항식의 계산
방정식과 함수	• 일차방정식과 일차함수 • 이차방정식과 이차함수
피타고라스 정리와 삼각비	• 피타고라스 정리 • 삼각비

〈일반 과목〉

■ 수학 I

영역	내용
다항식	• 다항식의 연산 • 나머지정리 • 인수분해
방정식과 부등식	• 복소수와 이차방정식 • 이차방정식과 이차함수 • 여러 가지 방정식 • 여러 가지 부등식
도형의 방정식	• 평면좌표 • 직선의 방정식 • 원의 방정식 • 도형의 이동 • 부등식의 영역

■ 수학 II

영역	내용
집합과 명제	• 집합 • 명제
함수	• 함수 • 유리함수와 무리함수
수열	• 등차수열과 등비수열 • 수열의 합 • 수학적 귀납법
지수와 로그	• 지수 • 로그

■ 미적분 I

영역	내용
수열의 극한	• 수열의 극한 • 급수
함수의 극한과 연속	• 함수의 극한 • 함수의 연속
다항함수의 미분법	• 미분계수 • 도함수 • 도함수의 활용
다항함수의 적분법	• 부정적분 • 정적분 • 정적분의 활용

■ 미적분 II

영역	내용
지수함수와 로그함수	• 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 • 지수함수와 로그함수의 미분
삼각함수	• 삼각함수의 뜻과 그래프 • 삼각함수의 미분
미분법	• 여러 가지 미분법 • 도함수의 활용
적분법	• 여러 가지 적분법 • 정적분의 활용

확률과 통계

영역	내용
순열과 조합	• 경우의 수 • 순열과 조합 • 분할 • 이항정리
확률	• 확률의 뜻과 활용 • 조건부확률
통계	• 확률분포 • 통계적 추정

기하와 벡터

영역	내용
평면 곡선	• 이차곡선 • 평면 곡선의 접선
평면벡터	• 벡터의 연산 • 평면벡터의 성분과 내적 • 평면 운동
공간도형과 공간벡터	• 공간도형 • 공간좌표 • 공간 벡터

〈심화 과목〉

고급 수학 I

영역	내용
벡터와 행렬	• 벡터 • 행렬과 연립일차방정식
일차변환	• 일차변환과 행렬 • 고윳값과 행렬의 거듭제곱
그래프	• 그래프의 뜻 • 여러 가지 그래프 • 그래프의 활용

고급 수학 II

영역	내용
복소수와 극좌표	• 복소수의 극형식 • 극좌표와 극방정식
미적분의 활용	• 미분의 활용 • 미분방정식 • 적분의 활용
편미분	• 이변수함수의 뜻 • 극한과 연속 • 편미분 • 편미분의 활용

III. 수학 교과서의 개발 동향

01 구성주의와 수학 교과서

구성주의의 수학 교육관은 '학생에 의한 수학 지식의 자주적 구성'이라는 교육관에 기초한다고 볼 수 있다. 구성주의를 수학 교육의 실제에 적용하고자 하는 사람들은 수학적 지식이 외부의 강화에 의하여 학습자에게 전달될 수 있다는 견해에 동의하지 않는다. 즉, 구성주의자들은 지식이 학습자의 내면 세계에서 적절한 경험을 통해 자주적으로 구성된다고 생각하고 있으며, 이것은 곧 학생들이 수학 지식을 수동적으로 받아들임으로써 획득하는 것이 아니라 각자 능동적으로 재발명해 나감으로써 (수학 지식을) 구성하는 것을 뜻한다. 따라서 구성주의적 입장을 취하는 수학 교육 관계자들은 전통적인 방식의 수학 교육을 개선할 수 있는 하나의 대안으로서 구성주의적 수학 교육을 제안하고 있는 것이다. 특히 사회적 구성주의자들은 이제껏 전통주의자들의 주된 관심사였던 수학 지식의 실제에 대한 인식론적인 논의보다는 수학 지식에 대한 구성주의적 교수-학습의 가능성에 관심을 두었다.

'구성주의'는 그 말 자체가 광범위한 의미를 지니고 있을 뿐만 아니라 '구성'이라는 용어도 모호하기 때문에 이를 해석하는 견해가 다양하다. 그러나 현재 우리나라 수학 교과서에는 교구 및 소프트웨어 등의 조작 활동의 필요성, 개인별 능력 차를 고려한 수준별 교재의 필요성, 의사소통을 고려한 교과서 개발의 필요성 등의 반영이 절실히 요구되고 있다. 이러한 요구 사항은 조작적 구성주의자로 불리는 피아제의 발생적 인식론의 중심 아이디어인 '조작', 급진적 구성주의자들이 지식의 진리 자체에 관한 논의를 거부하고 초미의 관심사로 여긴 '개인 중심적' 구성이나 '생장 원리', 사회적 구성주의자들이 객관성을 사회성으로 대치하면서 도입한 사회적 합의의 수단인 '의사소통'을 교재 구성에 반영하자는 생각과 크게 다르지 않다.

02 구성주의적 수학과 교수-학습 원리의 반영

수학 교수-학습론의 원천으로서의 구성주의에서 수학 교육에 적용할 수 있는 유효한 교수-학습 원리는 다음과 같다.

가. 교과서에 학생 중심적 개별화의 원리 반영

구성주의의 기본적인 주장인 지식의 자주적 구성의 원리는 학생들로 하여금 갈등 국면에 대처하여 동화와 조절의 메커니즘에 따라 반영적 추상화의 과정을 통해 새로운 지식을 조정해 나가는 과정을 보여 주고 있다. 이것은 질문을 중심으로 하는 상호 작용적인 추측 및 논박에 의한 수학 교수-학습의 바탕(모델)이 된다. 구성주의는 지식의 자주적 구성을 그 근본 원리로 하고 있지만, 교수-학습의 차원에서 논의되는 지식은 '주관 독립적'인 의미에서의 객관적 지식이 아니라, 규약과 협정 등의 수단을 통하여 '공통 주관적'인 의미에서의 객관성을 가지게 된다.

따라서 수학 교육학적 구성주의에서 취하고자 하는 관점은 바로 공통 주관적인 의미에서의 객관적 지식은 학생 자신에 의해 자주적으로 구성되어야 한다는 것이며, 이러한 관점은 학생 자신에 의한 지식의 능동적인 재발명을 목표로 하는 오늘날의 수학 교육에서 요구되고 있는 관점과 일치한다고 볼 수 있다. 이를 위해서는 학생 중심적인 개별화 수업이 가능하도록 수학적 과제가 제시되어야 할 것이다. 학생이 스스로 생각하고 해결 전략을 궁리해 낼 수 있는 기회를 부여함으로써 학습자 자신이 다양한 사고를 할 수 있도록 해야 한다는 것이다.

나. 교과서에 질문 중심적 상호 작용의 원리 반영

학교 밖의 사회나 교사들은 지금까지 대체적으로 수학 지식의 가치를 인정하고 수학 교육의 당위성을 이해해 왔을지 모르지만, 아마도 학생들은 그러한 당위성을 이해하지 못하였을 것이고, 결과적으로 수학을 의미 없는 것으로 받아들일 수밖에 없었을 것이다. 그렇다면 유효한 수학 교육이 이루어지기 위해서는 학생들이 배워야 할 수학, 즉 학교 수학이 학생들에게 의미 있는 것이 되어야 함은 물론 수학 교수-학습 활동에 참여하고자 하는 학생들의 적극적 의지가 수반되어야 한다. 결국 이를 교과서에 반영하는 것은 질문 중심의 상호 학습이 일어날 수 있도록 과제를 제시하는 형태가 될 것이다. 구성주의에서는 교사와 학생 및 학생과 학생 사이의 상호 작용을 매우 중요시한다. 즉, 교사가 적절한 질문으로 학생의 응답을 유도해 냄으로써 학생들로 하여금 일련의 추측 및 논박 활동을 통해 수학 지식을 구성할 수 있도록 교수-학습 환경을 설정할 것을 요구하고 있다. 따라서 의미 지향적인 활동 수업이 이루어지도록 교과서가 구성되어야 할 것이다.

다. 교과서에 의미 지향적 활동의 원리 반영

위에서 살펴본 수학 지식의 자주적인 구성이 교수-학습에서의 학생의 의미 지향적 활동이나 교사의 적절한 질문만으로 가능한 것은 아니다. 학생에 의한 지식의 자주적 구성은 지식 구성을 하는 학습자 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 자주적 활동 없이는 불가능하다. 다시 말해 효율적인 수학 교수-학습을 위해서는 학습자의 내면화된 자주적 활동이 학생의 교수-학습 활동에의 참여 의지 및 교사의 적절한 질문과 더불어 반드시 필요하다.

이때 이 내면화된 자주적 활동의 메커니즘을 구성주의가 설명해 주고 있는바, 이것이 바로 반영적 추상화이다. 그렇다면 학습자가 반영적 추상화의 과정을 경험할 수 있도록 교재가 구성되어야 함은 물론이다. 부연 설명하면, 교과서는 여러 가지 활동을 통하여 익힌 의미 있는 경험을 반성하여 자기 자신의 지식을 구성할 수 있도록 구현되어야 한다는 것이다.

03 구성주의적 관점에서의 교과서 개발 방향

위에서 살펴본 구성주의적 관점에 기초한 바람직한 수학 교과서를 구현하기 위하여 고려되어야 할 사항은 다음과 같다.

가. 교과서 저자의 철학

교과서에는 교과서 저자 나름대로의 철학이 배어 있어야 한다. 지금까지의 교과서에 제시된 교육과정상의 내용들은 누구나 합의할 수 있는 객관적이고 보편적인 것만을 다루도록 하는 것이 불문율이었다. 그러나 이제는 절대적 진리처럼 내용이 전개되던 교과서의 역할과 권위보다 학생들의 주체적인 사고의 참여를 촉발시킬 수 있는 '저자'의 역할과 권위를 우위에 두어야 할 것이다. 이때 교과서 저자는 자신이 왜 그러한 주제에 관심을 가지는지, 그것이 왜 중요한 것인지를 드러내고 어떻게 그 주제를 전개해 나아가는지 등에 관한 자신의 철학과 견해를 피력하고, 또 다른 견해들과의 차이를 드러내어 맥락화시킬 수 있도록 한다.

나. 안내형 교과서

전통주의적 입장에서의 교과서 방식은 학습 목표에서 추출된 세부적 요소들을 논리 정연하게 제시하는 '제시형 교과서'라고 할 수 있으며, 구성주의적 관점에서 보는 교과서는 교과서에 제시된 내용들에 학습자와의 실질적인 상호 작용을 통해서 그 의미가 발현될 수 있도록 소재적 가치를 부여하는 '안내형 교과서'라고 할 수 있다. 즉, 안내형 교과서는 학습하기를 기대하는 내용들을 직접 제시하는 대신 학습자로 하여금 구조적 변화를 경험하도록 안내하는 역할을 하는 내용으로 교과서를 구성하는 방식

을 취한다고 할 수 있다. 안내형 교과서는 개인적인 관심, 해석, 활동 등 학습자의 주체적인 역할에 큰 비중을 두고 학습자의 적극적이고 당사자적인 관여를 요청하고 있다.

이홍우(1997)는 "교과를 가르치되 학생의 경험과 의미 있게 관련되도록 가르쳐야 한다."라고 주장하면서 학생들은 자신이 배우는 다른 내용들을 쉽게 이해하고 기억할 수 있을 뿐만 아니라 학교에서 배운 것을 다른 상황에 쉽게 적용할 수 있어야 한다고 하였다. 그러기 위해서는 날로 팽창하는 지식을 모두 가르치려고 할 것이 아니라, 그중에서 기본 또는 핵심이 되는 것만을 골라 가르쳐야 하며, 이와 같이 기본이나 핵심이 되는 것을 '지식의 구조'라고 명명하였다. 즉, 지식의 구조를 알면 팽창하는 모든 지식을 하나씩 따로따로 배우지 않더라도 그 기본적인 것에 비추어서 나머지를 쉽게 이해할 수 있다고 본 것이다.

다. 관계적 이해를 도모하는 교과서

기존의 교과서는 지극히 제한된 지면에 방대한 내용을 소개해야 하기 때문에 가능한 한 핵심적이고 확실한 원리나 개념들을 중심으로 간결하고 함축적인 방식으로 제시하고 있다. 이와 같이 주요 주제나 개념들을 피상적으로 제시하는 방식은 교사와 학생들로 하여금 '관계적 이해'를 도모하기보다는 수학적 언어와 기호를 이용하여 외우고 재생해 내는 데 급급하게 하는 '도구적 지식'을 가지도록 한다.

도구적 수학은 보통 이해하기가 더 쉬우며, 보다 적은 지식이 필요하기 때문에 학습 결과에 대한 보상이 즉각적이고 명백하다. 그러나 이 방식은 수학의 전체 영역에 서로 연결되는 기초적인 개념을 교수-학습하기보다는 서로 분리하여 각각의 주제를 교수-학습하는 것이기 때문에 기대하는 학습이 이루어진다고 보기 어려울 것이다.

반면 관계적 이해를 통한 학습은 마치 나무가 영양분을 찾아서 뿌리를 뻗어 나가거나 동물이 먹이를 찾아 새로운 지역을 탐험하는 것과 같이 능동적으로 새로운 자료를 찾고 새로운 분야를 탐구하는 것에 비유될 수 있다. 그러므로 관계적 이해를 촉구하기 위해서는, 즉 핵심적인 원리나 개념을 습득하게 하기 위해서는 그러한 내용을 얻을 수 있도록 해당 절차를 안내(유도)하는 방식으로 교과서를 구성하도록 한다.

라. 질문 중심의 개념 전개

기존의 교과서는 수학적 지식을 대부분 완성된 형태로 제시하는 하향식 전개 방식을 택하고 있다. 또한 단원의 마무리 단계는 기본 문제, 연습 문제, 종합 문제, 심화 문제 등으로 구성되어 있다. 따라서 계산이나 풀이 형식의 정착을 위해 학생들이 풀어야 할 문제들이 교과서에 산적해 있다. 이런 상황에서 학생들은 문제 풀이를 위한 반복 훈련을 하는 데 주력하게 되고, 교사 역시 이러한 기능을 정착시키기 위한 내용 전개로 수업을 이끌어 가는 경향이 있다.

이를 개선하기 위해서는 현재 교과서에 수록되어 있는 반복 연습형의 문제들을 줄이고 그 대신 수학적 개념과 문제 해결의 절차를 이해시키는 데 주력함으로써, 학생들에게 '수학을 한다.'는 것이 이미 배운 개념이나 공식, 절차를 바로 적용해서 연습 문제를 푸는 것이 전부가 아니라는 사실을 인식시켜야 할 것이다.

마. 수학적 유용성 강조

수학은 실제로 모든 학문의 기초로서 우리의 일상생활뿐만 아니라 공학, 의학, 경제, 사회, 문화 등 여타 분야에 지대한 영향을 미치고 있음에도 불구하고 이에 대한 인식이 부족하다. 지금까지의 교과서의 내용 및 그 전개 방식을 살펴보면 교사나 학습자로 하여금 여러 단원의 내용들이 서로 독립된 것이라고 오판하기 쉽게 되어 있다. 따라서 앞으로의 교수-학습 자료에는 단원 간의 내용 연계성을 강조함으로써 학생들 각자의 스키마를 구성하는 데 도움이 되도록 해야 할 것이다. 특히 교과서에

수학의 활용성에 대한 구체적인 내용을 단원별로 또는 전체적으로 기술하고, 과학이나 미술 등 다른 교과목과의 연결성을 찾는 내용도 포함시켜 학생들이 수학의 중요성을 알도록 해야 할 것이다.

바. 다양한 교구 및 도구 활용

수학 수업에서의 교구 사용은 추상적인 수학적 개념을 구체물로 모델링한다는 데 가장 큰 의의가 있으며 이를 통해서 학생들은 수학적 절차나 공식보다는 그 이면에 내재되어 있는 의미를 알 수 있게 된다. 또 교구는 학생들이 직접 만지면서 다루기 때문에 학생 중심적인 개별화 수업을 가능하게 할 뿐만 아니라 2~4명의 소집단 학습을 통하여 집단별 그리고 전체 토론이 이루어짐으로써 반영적 추상화를 경험할 수 있게 한다. 우리나라의 수학 교육과정은 컴퓨터와 계산기의 사용을 교사나 학교의 재량에 따라 사용하도록 권장하고 있다. 하지만 실제 학교 현장에서는 이들을 수업에 언제, 어떻게 활용해야 하는지를 잘 모르고 있는 실정이다. 그러므로 교수-학습 자료에 컴퓨터나 계산기 등의 활용 지침 및 방안에 대한 자세한 설명이 수록되어야 할 것이다.

04 수준별 수업의 운영

가. 수준별 수업의 운영 방식

수학과의 경우 수준별 수업은 1996년부터 현장에서 서서히 실시되기 시작하여 제7차 단계형 수준별 교육과정의 취지에 따라 더욱 활성화되었다. 수준별 수업과 예전의 단계형 수준별 교육과정의 운영은 그 접근 방법이 다르다고 할 수 있겠으나, 학생의 수준에 적합한 교육 내용을 다루고자 하는 점에서 기본 취지는 동일한 것으로 볼 수 있다.

2009 개정 교육과정에 따른 교과서는 기본 과정과 심화 과정의 학습 내용이 명료히 구분되어 제시되어 있지 않지만, 수준별로 개념 설명의 접근 방법을 차별화하고 해당 문제들의 난이도를 조정한다면 분단 수업이나 이동 수업을 진행하기가 용이할 것이다. 이렇듯 수준별 수업은 전통적으로 해 왔던 일제 수업의 폐단을 줄이고, 교사들의 다양한 교수-학습 자료 개발을 활성화시키며 학습자 주도의 학습의 중요성을 인식시키는 등 현장 교육을 긍정적으로 이끌 것이다.

이렇듯 수준별 수업은 학생의 성취 수준에 따라 수준별로 반을 편성하여 동일한 학습 진도 내에서 학습 심도를 달리하여 지도하는 '동진도-이심도' 방식을 취하는 것이 바람직하다. 이에 따라 수준별로 적합한 수업을 진행하기 위해서는 기본적으로 교육과정에 제시된 기본 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 각 수준별로 다루어야 할 학습 내용의 정도와 방법을 차별화하도록 한다. 〈표 Ⅲ-1〉 참조 이때 한 차시의 수업 내용을 기준으로 하거나 또는 교과서의 한 소단원을 기준으로 하여도 무방하다.

〈표 Ⅲ-1〉 수준별 수업 운영 방식

<table>
<tr><th>반 수준</th><th colspan="3">수준별 수업 과정</th></tr>
<tr><td rowspan="2">상</td><td>내용 수준</td><td>기본 내용</td><td>심화 내용</td></tr>
<tr><td>수업 방식</td><td>개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결</td><td>발전 과제 해결</td></tr>
<tr><td rowspan="2">중</td><td>내용 수준</td><td>기본 내용</td><td>심화 내용</td></tr>
<tr><td>수업 방식</td><td>개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결</td><td>단순 과제 해결</td></tr>
<tr><td rowspan="2">하</td><td>내용 수준</td><td colspan="2">기본 내용</td></tr>
<tr><td>수업 방식</td><td colspan="2">선수 학습 내용의 이해 → 개념 이해 → 단순 과제 해결</td></tr>
</table>

나. 수준별 수업의 효율적 운영 방안

수준별 수업을 효율적으로 운영하기 위해서는 다음 사항에 유의해야 할 것이다.

(1) 학습자의 눈높이

개인차에 따른 학습 능력을 고려하여 수준별로 분단이나 학급을 편성하여 적절히 운영하여야 한다. 즉, 수준별 수업 운영을 위한 노력으로 우선 각 수준에 따라 수업 내용, 수업 진도 등이 적절한지 검토하여야 한다. 이때 무엇보다도 중요한 것은 수준별 수업을 위한 수업 내용, 수업 진도 등이 교사 또는 수학 교육 관련 전문가의 눈높이가 아닌 '학습자'의 눈높이에 맞춰져야 한다는 점이다.

(2) 내용의 차별화

수준별 개념에 입각한 교수-학습의 차별화는 수준에 따른 '학습 내용의 차별화'를 의미하는 것으로, '학습 내용의 차별화'란 각 수준별로 다루는 학습 내용 그 자체의 차별화를 말하는 것이다. 그런데 2009 개정 교육과정에는 학생들의 수준에 상관없이 모든 학생들이 공통으로 다루어야 하는 내용이 명시되어 있다. 그러므로 '학습 내용의 차별화'란 현행 교육과정에 기초한 공통 필수 격의 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 수준별로 중점을 두어 다루어야 할 '주요 내용'을 차별화하는 것으로 이해할 수 있다. 따라서 '문항의 난이도'뿐만 아니라 각 수준에 적합한 '내용의 차별화'에 기초를 둔 수준별 학습 자료가 개발되어야 할 것이다.

(3) 귀납적 학습법

수학 수업을 전개해 나가는 데 있어서 일반적으로는 개념 및 원리를 설명하고 이에 따른 예제를 푼 뒤 반복 연습 문제를 푸는 '연역적 방식'을 취하고 있다. 그러나 경우에 따라서는 예 또는 예제들을 통하여 그에 부합되는 학습 내용들을 체계적으로 정리하는 '귀납적 방식'을 취함으로써 학습의 이해를 보다 높일 수도 있다. 특히 학습 결손이 명백히 드러난 학생들에게 지극히 한정된 몇몇 문제의 풀이로 학습 내용을 이해시키기는 어렵다. 그러므로 각 수준별로 구체적인 예 또는 예제를 통하여 그에 부합되는 학습 내용(개념, 원리, 법칙 등)을 정리해 나가는 귀납적 방식의 수업도 병행해야 할 것이다.

(4) 소집단별 수행 과제 활동

수준별 능력에 따른 과제(open-response tasks)를 제시하여 학생들이 과제를 수행하면서 어떤 수학적 지식을 사용하고 또 어떻게 접근해 나가야 하는지 등에 관하여 스스로 탐색해 볼 수 있도록 해야 한다. 그러므로 45분의 수업 시간에 모든 활동이 이루어져야 한다는 제한된 시각에서 벗어나 수업 이외의 시간을 활용하여 좀 더 발전 지향적인 장 · 단기 과제를 다루는 것이 바람직할 것이다. 특히 소집단별 수행 과제 활동은 본인이 속한 집단의 구성원들과 그 결과를 기록하여 발표할 수 있는 '의사소통' 능력의 발휘가 가능하므로, 이를 통하여 다양한 자료를 수집, 표현, 분석, 해석함으로써 과제를 성공적으로 수행할 수 있도록 해야 할 것이다.

IV. 수학적 문제 해결

01 문제 해결의 의미

20세기 초에 이루어진 문제 해결에 대한 논의는 1960년대의 '새수학' 운동과 1970년대의 '기본으로 돌아가기' 운동과 같은 과정을 거치면서 크게 부각되지는 못하다가, 1980년대에 들어 기초 기능으로서의 문제 해결력에 대한 관심이 높아지기 시작하면서 부흥기를 맞게 된다. 미국의 수학교사협의회인 NCTM(1980)이 'An Agenda for Action'에서 문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 함을 선언한 이래 1980년대는 문제 해결의 시대라고 할 만큼 이에 대한 다양하고 활발한 논의가 이루어졌다(황혜정 외, 2012, 재인용).

이 같은 문제 해결의 조류는 우리나라의 수학 교육과정에도 서서히 등장하였다. 제3차 교육과정에서 급격하게 도입되었던 수학 교육 현대화의 내용은 제4차 교육과정에서 경감되고 정선되면서 지나치게 어려운 내용보다는 수학의 기초적 기능을 배양하고 문제 해결력을 신장시키는 데 관심을 가지게 되었다. 이어 제5차 수학과 교육과정에서도 수학 내용을 정선하면서 문제 해결력의 신장을 강조하였으며, 제6차와 제7차 교육과정에서는 문제 해결력의 신장을 위한 지도 내용, 전략, 방법 등을 구체적으로 제시하여 문제 해결력의 지도가 보다 적극성을 띠게 되었다.

또한 2007 개정 교육과정에 이어, 2009 개정 교육과정 문서의 모든 교과목의 '교수-학습 방법' 부분에도 문제 해결에 관한 다음과 같은 내용이 명시되어 있다(교육과학기술부, 2011).

수학적 문제 해결력을 신장시키기 위하여 교수-학습에서 다음 사항에 유의한다.

(1) 문제 해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.
(2) 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.
(3) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 문제 해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.
(4) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

02 문제의 의미와 유형

가. 문제의 의미

문제 해결에서의 '문제'는 해결의 절차가 이미 알려져 있어서 단순히 계산 연습의 대상이 되는 문제보다는, 구체적이고 확실한 해결 방법을 쉽게 구하기 어렵고 문제 해결 과정에서 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 문제를 말한다. 예를 들어 문제 해결이라고 하면 이차방정식의 근의 공식을 배운 후에 근의 공식을 적용하여 주어진 이차방정식의 해를 구하는 것과 같이 배운 내용을 단순하게 적용하여 해를 구하는 연습 문제를 떠올릴지도 모른다. 그러나 최근 수학 교육에서 중요시되는 문제 해결은 이미 배운 수학적 사실이나 알고리즘을 단순히 적용하는 수준의 것이 아니다. 진정한 문제는 목표는 분명하지만 그 목표에 이르는 길이 즉각적으로 주어져 있지 않은 것이다. 문제의 해결에 이르는 알고리즘이나 풀이 방법이 이미 주어져 있거나 알려져 있다면 그 문제는 진정한 의미의 문제라고 보기 어렵다.

나. 문제의 유형

문제의 유형을 분류하는 데에는 여러 가지 견해가 있지만, 가장 보편적인 방법 중의 하나는 ‘정형 문제’와 ‘비정형 문제’로 구분하는 것이다.

■ 정형 문제(routine problems)

이미 제시된 알고리즘을 사용한다. 예를 들어 공식에 나오는 변수에 특정한 수를 대입하여 해결할 수 있는 문제나 전형적인 예제의 풀이 방법을 그대로 적용하여 해결할 수 있는 문제가 해당된다.

■ 비정형 문제(non-routine problems)

문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르는 상태에서 문제 해결 전략이나 독자적인 해결 방법을 고안하여 풀어야 하는 문제를 말한다.

03 문제 해결 과정

폴리아(Pólya, 1957)는 수학적 문제 해결의 과정을 다음과 같이 4단계로 구분하여 제시하고 있다.

문제 이해 → 계획 작성 → 계획 실행 → 반성

다음 표는 문제 해결의 각 단계에서 교사가 사용할 수 있는 적절한 질문과 권고의 예이다.

〈표 Ⅳ-1〉 문제 해결 단계별 질문의 예

문제 해결 과정		해당 질문
문제 이해	문제를 이해하는 단계로, 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고 용어의 뜻을 파악하며 문제를 분석하는 단계이다.	• 미지인 것, 주어진 것은 무엇인가? • 자료는 무엇인가? • 조건은 무엇인가? • 그림을 그려 보고, 적절한 기호를 붙여라.
계획 작성	문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 여러 가지 문제 해결 전략을 이용하게 된다. 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때에는 보조 문제를 고려해야 한다.	• 전에 그 문제를 본 적이 있는가? • 친숙한 문제 중에서 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라. • 유사한 문제는? • 문제를 푸는 데 필요한 조건을 모두 사용했는가?
계획 실행	해결 계획에 따라 실행하는 단계이다.	• 풀이의 각 단계를 조심스럽게 실행하도록 하라. • 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? • 각 단계가 옳다는 것을 설명할 수 있는가?
반성	문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지 알아본 뒤, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 비교해 본다.	• 결과를 점검할 수 있는가? • 풀이 과정을 점검할 수 있는가? • 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? • 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수 있는가?

한편 문제 해결 전략이란 문제 해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견의 실마리를 얻도록 하는 방법 등의 사고 전략을 뜻한다. 크룰릭과 루드닉(Krulick, Rudnick, 1984)은 문제 해결 전략으로 패턴 찾기, 거꾸로 풀기, 추측과 검증, 모의실험, 환원, 목록 작성, 논리적 연역, 자료 정리(그래프, 방정식, 대수식, 표, 차트, 도식)를 제시하였으며, 그리노(Greeno, 1978)는 어림산, 단순화하기, 실험하기, 그림 그리기, 표 만들기, 그래프 그리기, 방정식 세우기, 규칙성 찾기, 순서도 구성, 판단 공간(decision-space)의 분할, 연역 논리로 문제 해결 전략을 구분하였다.

04 문제 해결의 예

다음에 주어진 문제를 폴리아(Pólya, 1957)의 문제 해결 4단계를 따라 풀어 보면 다음과 같다.

> ㉠ 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라고 하면, 가로의 길이는 얼마인가?

① 문제의 이해

문제에서 구하려는 것은 가로의 길이이며, 문제에서 주어진 것은 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라는 사실이다.

② 계획 세우기

직사각형의 세로의 길이를 x라고 하면, 가로의 길이는 $2.5x$가 된다. 직사각형의 둘레의 길이는 네 변의 길이의 합과 같으므로 $x+2.5x+x+2.5x=35$

③ 계획의 실행

방정식을 풀면 $7x=35$, 즉 $x=5$이므로 가로의 길이는 $2.5\times5=12.5$(cm)이다.

④ 풀이의 반성

풀이 과정을 검토하여 잘못된 곳은 없는지 확인한다. 또 다른 방법으로도 문제를 해결할 수 있는지 조사한다. 이 문제의 경우 다음과 같이 풀 수도 있다.

가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배이므로

$$(\text{가로의 길이}):(\text{세로의 길이})=2.5:1=5:2$$

이고, 둘레의 길이가 35 cm이므로

$$(\text{가로의 길이})+(\text{세로의 길이})=\frac{35}{2}=17.5$$

따라서 가로의 길이는 $17.5\times\frac{5}{7}=12.5$(cm)이다.

㉠와 유사한 문제를 다음과 같이 만들어 풀어 본다.

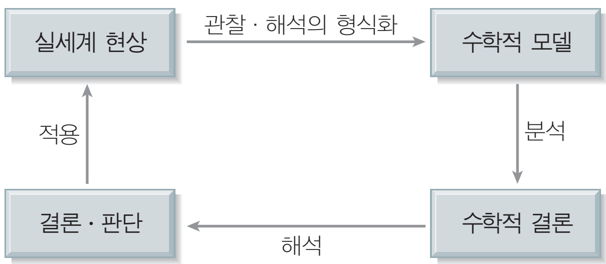
> 둘레의 길이가 35 cm인 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 3 cm 더 길 때, 가로의 길이를 구하여라.

05 문제 해결 과정과 수학적 모델링

가. 문제 해결 과정과 수학적 모델링

수학적 모델링은 문제 해결의 특징을 지니지만, 비수학적 문제 상황에서 출발하는 것을 기본으로 한다는 점에서 문제 해결과 차별화된다(NCTM, 1991). 즉, 수학적 모델링은 비수학적 대상에서 수학적 표상을 찾는 것으로, 대상이나 체계 또는 과정의 중요한 특징을 이루는 수학적 구조나 이론을 세우는 것을 말하며, 어떤 현상에 관한 문제를 해결하기 위하여 원래의 문제 상황을 수학적으로 표현하는 수학화의 과정을 중시한다. 특히 한 체계에서의 개념이나 문제 상황을 다른 체계로 번안하여 내면화하거나 해결해 가는 과정은 모델링 과정의 전이가 쉽게 일어나도록 할 수 있음을 의미한다. 또한 수학적 모델링은 수학과 다른 과목 또는 일상생활과의 연결성을 강조한다. 이것은 수학 학습의 초점이 완결된 지식의 획득이 아니라 지속적인 모델의 구안과 수정을 통한 본 개념의 이해에 맞추어져야 함을 의미한다.

일상생활에서의 경험이 모델링 과정을 통해 수학적으로 재조직될수록 한 체계에서 다른 체계로 쉽게 전이되어 요소들 사이의 관계 구조의 파악이 용이하고, 이를 바탕으로 실세계에서 제기된 문제를 해결할 수 있다. 수학적으로 의미 있는 모델을 구성하는 모델링 과정은 4단계의 순환 과정으로 구성되며, 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-1] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

NCTM(1991)의 '*Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*'에서는 수학적 모델링 과정을 다음과 같이 설명하고 있다.

① 현상을 관찰하여 그 현상에 내재되어 있는 문제 상황을 명료히 밝히고, 문제에 중요한 영향을 미치는 요인들을 찾는다.
② 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축한다.
③ 적절한 수학적 분석을 구축한 모델에 적용한다.
④ 결과를 얻어 내고 그 결과를 현상에 맞도록 재해석하여 결론을 도출한다.

요약하면 수학적 모델링은 실세계의 여러 현상을 수학적인 수단에 의해 정리하고 조직하는 활동으로, 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 수학적 표현으로 변환하면서 현상에 내재된 수학적 개념을 파악, 문제를 해결하여 실세계의 문제 상황에 적용할 수 있도록 하는 활동 과정이다. 이러한 수학적 모델링을 통한 수학 학습은 새로운 수학적 개념을 도입하거나 이미 개발된 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하는 데 유용하여, 중요한 수학적 아이디어와 문제 해결 과정에 강력한 수단이 된다. 따라서 수학적 모델링을 통하여 수학 교육에서 다음과 같은 목적을 달성할 수 있다(Niss, 1989).

- 새로운 수학적 개념과 방법을 이해한다.
- 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.
- 창의적 사고와 문제 해결 태도, 활동, 능력을 기른다.
- 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하는 태도를 기른다.
- 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어지고 있는 것임을 이해한다.

나. 수학적 모델링의 예

연못에 있는 물고기의 수를 조사하는 다음 상황을 통해 수학적 모델링을 살펴보자.

(1) 문제 상황

이 게임의 목적은 연못에 있는 물고기의 수를 알아내는 것이다. 이러한 정보는 연못을 관리하고 물고기에 대해 파악하는 데 도움을 줄 것이다. 연못에 있는 물고기의 수를 어떻게 추측할 수 있겠는가?

(2) 필요한 수학 개념

비와 비율

(3) 모델

우리는 연못에 있는 물고기의 수를 알 수 없으므로, 물고기의 수를 n마리라고 하자.

우선 몇 마리의 물고기를 잡아 물고기가 다치지 않게 꼬리에 표를 달고, 다시 그 물고기들을 연못에 놓아준다고 가정하자. n마리 중에서 p마리를 잡아 표시를 하고, 며칠 후에 q마리의 물고기를 잡는다면 그중에는 꼬리표를 단 것도 있고 달지 않은 것도 있을 것이다. 이때 꼬리표를 단 물고기의 수를 x라고 하면, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{p}{n}=\frac{x}{q}$$

p, x, q 모두 측정값이므로, n의 값을 구할 수 있다.

다음은 앞과 같은 활동을 10번 시행한 예이다.

표본 채취 순서	꼬리표를 단 물고기의 수	표본 수
1	3	15
2	0	15
3	3	15
4	1	15
5	2	15
6	4	15
7	6	15
8	2	15
9	4	15
10	2	15

이때 좀 더 정확한 n의 값을 구하기 위해서는, x의 평균 $\overline{x}$를 구하여 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$$n=\frac{pq}{\overline{x}}$$

예를 들어 처음에 표시한 물고기의 수(p)가 10마리이고 다섯 번 표본을 채취했다면, $\overline{x}=1.8$, $p=10$, $q=15$이므로 $n=83$이다.

위와 같이 연못에 있는 물고기의 수를 측정하는 이러한 과정을 'the capture/recapture' 방법이라고 하며, 이것은 게임으로도 사용되고 보존청에서도 활용되고 있다.

V. 수학과 평가의 특징 및 방법

01 수학과 평가의 동향

1990년대 초 미국 NCTM의 대안적 평가의 강조를 기점으로, 우리나라에서도 1995년 교육개혁위원회 주체의 ‘세계화 · 정보화 시대를 주도하는 신교육체제 수립을 위한 교육개혁방안’ 수립, 1997년 서울시교육청의 초등학교 새물결 운동, 1997년 제7차 교육과정 개정 등의 영향으로 학교 현장에 수행 평가가 점차 반영되기 시작하였다. 결과적으로 우리나라에서도 전통적인 평가 방식의 변화 및 개선의 필요성이 인식되면서 새로운 평가 방법의 도입이 요청되고 이를 위한 대안으로 학교 현장에의 수행 평가 도입 및 활성화 방안이 추진되었으며, 이는 현재까지 지속적으로 강조되고 있다.

이에 대한 실례로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 모든 교과목에서의 평가 부분은 다음과 같이 진술되어 있다(교육과학기술부, 2011).

가. 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하고, 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다.
나. 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 단계를 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.
다. 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등을 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.
라. 수학 학습의 평가에서는 선택형 위주의 평가를 지양하고 서술형 평가, 관찰, 면담, 자기 평가 등의 다양한 평가 방법을 활용하여 수학 학습에 대한 종합적인 평가가 이루어질 수 있게 한다.
마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수－학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.
  (1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력
  (2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력
  (3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력
  (4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력
  (5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력
  (6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력
  (7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력
바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 수학 및 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치 인식 등의 정도를 파악한다.
사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

이상의 내용을 중심으로 우리나라 수학과의 평가 동향을 간략히 살펴보면, 우선 평가를 통하여 학생에 대한 등급을 매기기보다는 학생과 교사에게 도움을 주는 것이 강조되어 있으며, 최종 결과의 평가보다는 과정에 대한 평가를 강조하고 있다. 또한 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가 등을 권장하고 있다. 특히 최근 들어 인지적 영역에 대한 평가뿐만 아니라 정의적 영역에 대한 평가도 점차 강조되고 있다. 아울러 평가 상황에서도 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구 및 교구의 적절한 이용을 권장하고 있음을 알 수 있다.

02 수학과 평가의 원리

학교 수학에서의 평가는 주로 교수-학습 방법의 개선을 위하여 이루어져야 하는데, 그동안 평가는 수준 판정 및 선발의 목적을 달성하는 데 치중해 왔다. 이로 인해 평가는 학생들에게 도움을 주기보다 많은 심적인 부담을 안겨 주었으며, 그러한 평가 결과는 교사의 수업 방법을 반성하고 개선하는 데 그다지 활발히 활용되지 못하였다. 또 지식을 측정하는 지필 검사가 전적으로 활용되고, 창의력, 탐구력과 같은 고등 정신 능력과 흥미, 관심, 열의와 같은 정의적 능력을 평가할 수 있는 다양한 평가 방법이 활용되지 못하였다. 이렇듯 잘못된 평가 방식은 교육 본연의 모습을 그르칠 수도 있지만, 반대로 올바른 평가 방식은 교육 본연의 모습을 찾는 데 절대적인 영향을 미친다. 이에 따라 수학 교과에서 점차 지향되고 있는 평가의 동향이나 특징에서 알 수 있는 바와 같이, 수학과 평가가 바르게 이루어지기 위해서는 다음과 같은 기본 원리가 지켜져야 한다(황혜정 외, 1997).

가. 발달적 교육관을 중시하는 평가

평가는 그 방향과 방법에 영향을 주는 기준하에서 선발적 교육관과 발달적 교육관으로 대별할 수 있는데, 발달적 교육관에서의 교육 평가는 학생의 선발이나 개인차를 내는 데 관심이 있는 것이 아니라, 모든 학생이 가능한 한 의도하는 바의 수업 목표를 달성할 수 있도록 모든 학습자에게 적절한 학습 방법을 배치하기 위한 평가를 하게 된다. 또한 학생 간의 서열과 개인차를 내기 위한 평가 방법보다는 주어진 수업 목표를 어느 정도 달성하였는가 하는 수업 목표 달성도의 평가에 그 관심이 집중된다.

발달적 교육관은 준거지향평가의 관점으로 귀결된다고 할 수 있다. 평가의 목적에 따라서 상대평가를 하여야 할 때가 있고, 준거지향평가를 하여야 할 때도 있다. 그러나 수학과 평가가 수학적 능력을 신장시킨다는 목적을 달성하기 위해서는 교사가 선발적 교육관보다는 발달적 교육관을 지녀야 한다. 그럼으로써 교사는 교육 목표의 달성도와 학생의 학습 과정에 더욱 관심을 기울이고 자신의 수업 방법과 평가 방법에 대해 보다 반성하며 학생 개개인에 적합한 교수-학습 방법을 적용할 수 있다.

나. 다양한 평가 방법을 수반하는 평가

그동안 수학 교과에서 다양한 평가 방법이 사용되지 못한 주된 이유는 교사에게 주는 부담, 그리고 다양한 평가 방법을 활용할 수 있는 다양한 형태의 수업을 하는 데 교사가 익숙하지 못하기 때문이다. 또 수학에서는 지필 검사만으로도 학생들의 수학적 능력을 충분히 평가할 수 있다는 잘못된 인식 때문일 수도 있다. 그러나 지필 검사만으로는 다양한 상황에서 다양하게 표현되는 수학적 능력을 종합적으로 바르게 평가할 수 없다. 수학이 타 교과목과는 다른 특성을 지니고 있다고 하더라도, 수학적 능력 역시 다양한 평가 방식을 통해서 바르게 평가될 수 있다. 이제까지의 일상적인 수업 방법을 탈피하여 학생들의 수학적 사고를 자극하는 새로운 수업 방법을 적용하여 보고, 또 이에 부합하는 새로운 방법으로 평가를 해야 할 것이다.

다. 문제 해결 과정을 중시하는 평가

현재의 수학과 평가에서는 정 · 오답 여부, 점수, 석차 등이 중요시되고 있으며, '학생이 어떠한 사고 과정을 거쳐서 이 문제를 해결하였는가?', '학생이 사고 과정에서 어떤 오류를 범해서 문제를 풀지 못하였는가?'는 중요시되지 않는다. 이는 다인수 학급에서의 평가의 효율성, 선발적 교육관, 상대적 평가관이 중요시되는 분위기 때문이다. 그러나 이러한 평가 방식이 계속 적용되면 학생은 사고 과정, 문제 해결 과정의 타당성보다 정 · 오답 여부에만 신경을 쓰기 때문에 학생의 수학적 사고 능력, 문제 해결력은 향상되지 못한다. 또 교사는 학생 개개인이 지닌 사고 과정의 결함을 알 수 없기 때문에 그러한 결함들이 발견되어도 치유되기 어렵다. 교사 역시 자신의 교육 방법을 반성해 가면서 학생을 지도할 기회를 가지기

어렵다. 그러므로 이러한 일을 가능하게 하려면 다양한 풀이 과정과 방법이 공유되는 해결(또는 수행) 과정을 중요시하는 평가가 이루어져야 할 것이다.

라. 정의적 영역의 능력을 중시하는 평가

정의적 영역의 평가는 수학적 지식 및 기능에 관한 인지적 영역의 평가 못지않게 중요하다. 학생이 가지는 수학적 성향은 그가 수학에 계속적으로 관심을 가지고 공부를 하며, 높은 성취를 이룰 수 있을 것인지를 판단하는 중요한 준거가 된다. 최근 들어 우리나라에서도 정의적 영역에 대한 평가의 중요성이 점차 인식되고 있다. 이는 우리나라 학생들이 국제 학업성취도 비교 평가에서 수학 학업성취 수준은 세계 최상위권임에도 불구하고, 정의적 수준은 최하위권인 것으로 나타났기 때문이다. 많은 학생들이 수학은 재미없고 어려운 과목, 일상생활에 도움이 안 되는 과목, 대학 입시를 위한 과목 등 매우 부정적인 교과로 인식하고 있는 것으로 나타났다. 이는 우리 사회에 큰 우려감을 주고 있으며, 이에 대한 개선책이 요구되고 있다(박선화 외, 2010).

그럼에도 불구하고 우리의 현실에서 정의적 영역에서의 평가가 제대로 이루어지고 있지 않은 이유는 평가에서의 주관성과 교사의 주관적 판단을 중요하게 여기지 않고 신뢰하지 못하는 분위기, 평가상의 번거로움, 교사들이 쉽게 이용할 수 있는 평가 도구나 자료의 부족 때문이다. 이에 따라 교사의 주관적 판단의 중요성을 인식하고 그것을 신뢰하며, 평가상의 번거로움을 최소화하고, 교사들이 손쉽게 이용할 수 있는 관찰 또는 면담지 등의 평가 도구가 개발되고 제공된다면, 정의적 영역에 대한 평가도 보다 활성화될 수 있을 것이다.

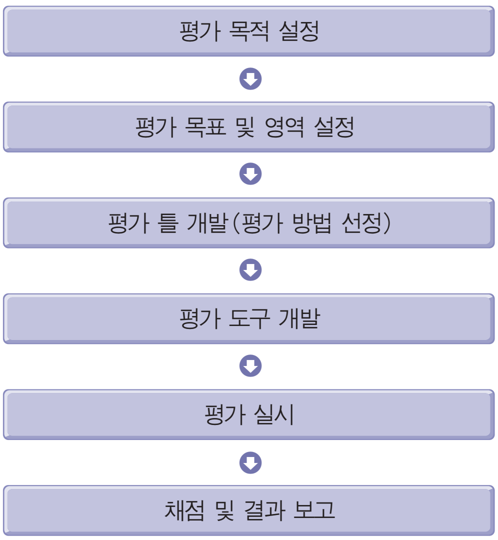
여기서 수학에 대한 정의적 특성의 의미와 구성 요소를 간단히 살펴보면 다음과 같다. 한국교육과정평가원(박선화 외, 2010)에서는 수학에 대한 정의적 특성을 수학에 대한 경험으로 인하여 형성된 정서, 신념, 동기 등을 포함하는 심리적 특성으로 정의하여 제시하였다.

〈표 Ⅴ-1〉 수학에 대한 정의적 특성의 요소

범주	하위 요소	정의
정서: 비교적 강하게 단시간 동안 계속되는 감정. 희노애락, 애증, 공포, 쾌감 등	흥미	교과나 학습 주제 등에 대해 주관적으로 느끼는 선호도 및 학습 활동에 참여함으로써 발생하는 즉각적인 재미
	호기심	지속적이면서 일관되게 새로운 것을 추구하는 개인의 심리적 경향성
	수학 불안	수학 교과 자체 또는 수학과 관련된 일이나 문제 등에 대하여 긴장하고 두려워하거나 걱정하고 염려하는 심리 상태
신념: 어떤 아이디어, 사건, 행위 등과 같은 대상에 대해 여러 반응을 시도하고 다양한 시행착오의 과정을 반복하면서 형성된 가치 체계	수학관	문화적 가치와 사회적 기대를 경험과 학습을 통하여 내면화한 것으로 수학이 가지고 있는 교과로서의 특성과 그에 적절한 학습 방법에 관한 개인적인 관점
	가치 인식	사회적 맥락이나 학습자 자신의 삶의 맥락과의 관계 속에서 수학의 기능과 유용성에 대한 평가
	귀인	수학과 관련된 성공과 실패의 원인에 대한 개인적 지각으로 원인의 소재(내적·외적 요인), 안정성, 통제 가능성에 대한 추론
동기: 학습 활동을 유발하고 지속하게 하는 힘으로서 학습 활동을 의미 있고 가치 있는 것으로 보고 학습 활동으로부터 의도된 가치를 얻고자 하는 경향성	목표 지향성	성취 상황에서 개인이 과제를 수행하는 목표에 대한 개인의 지향성으로, 타인과 비교하거나 자신의 능력을 타인에게 증명하기 위한 목표인 수행 목표와 과제의 숙달이나 능력을 향상하기 위한 목표인 숙달 목표로 구분됨
	자기 효능감	목표 달성에 필요한 행동 과정을 조직하고 행하는 자신의 능력에 대한 믿음으로, 특정한 시간에 주어진 특정 과제를 잘 수행할 수 있는지에 대한 인식
	자기 조절력	개인적 목표 설정과 설정한 목표를 성취하기 위한 행동 조정으로, 장기적 목표 달성을 위해 바람직한 행동을 추구하고 그렇지 않은 행동은 억제하여 충동적이거나 즉각적이지 않고 스스로 문제를 신중하게 계획, 해결, 평가하려는 경향성

03 수학과 평가 절차

평가는 상황에 따라 다양한 형태로 시행되므로 모든 상황에 적용 가능한 평가 절차를 규명하기란 쉽지 않다. 하지만 교사가 평가 주체자가 되어 학생들의 수학적 능력이나 태도를 평가하는 경우에 초점을 두어, 평가 시행을 위한 기본 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅴ-1] 수학과 평가의 기본 절차

평가를 하고자 할 때 가장 먼저 고려해야 할 것은 '어떤 목적으로 평가를 할 것인가'를 결정하는 일이다. 진단평가나 형성평가와 같이 교사가 자신의 수업에 대한 피드백을 얻기 위한 목적으로 평가를 실시한다면 수업을 진행하기 전이나 진행하는 도중에 평가를 실시하여 그 결과를 수업 개선에 활용하게 될 것이다. 반면 총괄평가와 같이 학생들의 성취 정도에 따라 등급을 결정하는 것이 목적이라면 보다 객관적인 평가 방법을 이용하며, 평가의 내용도 한 학기 또는 일 년 동안 학생들이 학습한 전체 내용을 포괄하는 것이 더 타당할 것이다. 이처럼 평가의 목적에 따라 평가 내용, 방법, 시기 등 진행되는 평가의 전체적인 모습이 달라지므로, 우선 평가를 하고자 하는 목적부터 염두에 두어야 할 것이다.

두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 결정한 평가 목적에 따라 평가하고자 하는 영역(이하 평가 영역)을 설정하고, 해당 영역의 주요 교육 목표가 무엇인지 확인하여야 한다. 이때의 교육 목표는 각 문항에 대한 구체적인 평가 목표를 뜻하는 것이 아니라 교육과정의 목표 및 내용에 준하여 해당 평가 영역의 교육 목표를 설정하는 것을 말한다.

세 번째 단계에서는 균형 있는 평가 도구 개발을 위하여 평가 틀을 개발하는 것이다. 평가 틀은 평가 영역의 교육 목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동 영역과 내용 영역, 평가 목표, 평가 문항 유형, 각 요소별 문항 출제 비율 등을 포괄적으로 포함한다.

또한 이때 평가하고자 하는 목적, 평가하고자 할 영역, 그리고 그 영역에 해당하는 교육 목표를 토대로 이에 부합하는 평가 방법을 선정하여야 할 것이다. 예를 들어 총괄평가를 실시할 목적으로 특정 평가 영역을 선정하여 해당 교육 목표가 확인되었을 때, 인지적 영역 능력에 관한 평가를 실시하기 위해서는 이에 부합하는 평가 방법을, 정의적 영역 능력에 관한 평가를 실시하고자 할 경우에는 이에 따른 적절한 평가 방법을 사용해야 할 것이다.

네 번째 단계는 위의 세 번째 단계를 통해 마련된 평가 틀에 부합하는 평가 도구를 개발하는 과정이다. 평가 도구 개발 시에 문항의 양호도, 검사 시행의 시간 소요 등을 고려하여 문항을 개발하고 그에 따라 모범 답안 및 채점 기준도 개발하여야 한다. 이때 '평가 도구 개발'이란 인지적 영역의 평가에서 지필 검사를 위한 평가 문항 개발, 채점 기준 및 예상 답안 작성과 정의적 영역에서의 평가를 위한 평가(주로 관찰 및 면담) 요목 개발, 기록 방법 작성 등을 총체적으로 일컫는 말이다.

다섯 번째 단계에서는 평가를 실시하고, 가채점을 통하여 사전에 준비한 채점 기준 및 예상 답안의 적절성을 검토하여 이를 수정 · 보완한 후, 이를 참고로 하여 실제적인 채점에 임하도록 한다.

마지막 단계로는 평가 목적에 따라 적절한 방법으로 기록하여 그 결과를 보고하도록 한다.

04 수학과 평가 틀 개발 시 유의 사항

학교 수학에서 수학 교육 목표를 내용과 행동 수준에 맞추어 평가하는 것은 바람직한 일이며, 이를 위해서는 수학과에 적합한 평가 틀을 마련하여야 한다. 평가 틀은 평가 도구 개발 및 평가의 전 과정에서 평가 방향과 평가 관련 항목을 선택하거나 결정할 때 판단의 준거가 된다. 평가 틀은 평가에 관한 보다 체계적이고 포괄적인 구조를 설명할 수 있다는 장점과 더불어 평가 문항과 내용 및 행동 영역의 적합성을 판정하고 설명하는 데 용이하다고 할 수 있다. 〈표 Ⅴ-2〉, 〈표 Ⅴ-3〉 참조

수학과 평가 틀을 개발하는 데 있어서 고려해야 할 제한 사항은 다음과 같다.

첫째, 일반적으로 평가의 목적은 우수 학생을 선발하려는 것이 아니고 학생들의 교육 성취 정도(수준)가 얼마나 되는지, 그리고 각각의 수준에 도달한 학생들이 얼마나 되는지 파악하는 데 있으므로 평가 틀이 학생들의 성취 수준을 골고루 측정해 낼 수 있도록 세워져야 한다. 그러므로 가장 기초가 되는 수준에서부터 우수한 학생까지의 성취 정도가 잘 드러날 수 있도록 다양한 수준의 문항으로 구성되어야 한다.

둘째, 가능하면 평가 요소를 적어도 내용 영역과 행동 영역으로 이원화하도록 한다. 특히 행동 영역을 설정하여 소홀하기 쉬운 '지식의 활용 또는 적용' 능력에 의미 있는 비중을 두도록 한다. 동시에 폭넓은 수준의 학업 성취의 정도를 파악할 수 있도록 행동 영역을 가장 기초적인 지식이나 단순 계산에서부터 보다 복합적인 사고를 요구하는 탐구나 문제 해결 능력까지 평가의 대상으로 삼아, 학생들이 어느 영역에 더 높은 성취를 보이는지 파악할 수 있도록 한다.

셋째, 평가 틀의 구성에 있어서 시대적 요구가 강한 행동 영역을 의도적으로 평가 틀에 포함시키도록 한다. 예를 들어 의사소통 능력과 같이 시대적으로 강력히 요구되고 있으면서도 실제 학교 현장에서는 소홀히 다루어지는 능력을 평가 틀에 과감히 도입함으로써 학교 교육과정 운영에 있어서 선도적 역할을 기대해 볼 만하다.

〈표 Ⅴ-2〉 수학과 평가 틀의 예

내용 영역 \ 행동 영역	계산	이해	추론	문제 해결
수와 연산				
문자와 식				
함수				
확률과 통계				
기하				

〈표 Ⅴ-3〉 수학과 평가 틀에서의 인지적 행동 영역의 정의

행동 영역	정의
계산	여러 가지 계산법, 나아가 문제 해결에 이르기 위한 명확한 절차, 즉 알고리즘을 능숙하게 구사할 수 있는 능력에 관한 것
이해	기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성을 이해하여 의미 충실한 개념적 사고를 형성할 수 있는 능력에 관한 것
추론	• 관찰, 열거, 실험 등을 통한 귀납과 유추, 추측에 의해 수학적 법칙과 문제의 해법을 발견할 수 있는 능력에 관한 것 • 조건명제의 증명, 삼단논법에 의한 연역적 추론, 반례에 의한 증명, 간접증명법, 모순법, 동치인 명제의 증명, 수학적 귀납법 등을 이용한 증명을 읽고 이해할 수 있으며, 이러한 방법을 사용하여 수학적 명제를 증명할 수 있는 능력에 관한 것
문제 해결	• 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 수학 내적인 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것 • 수학과 일상생활 및 타 교과 내용과의 관련성의 파악이 요구되는 통합 교과적(수학 외적)인 소재의 응용 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것

05 서술형 및 수행 평가 문항의 채점 방법

서술형 또는 수행 평가 문항 등에서 학생들은 문제(질문 내용)조차 이해하지 못하는 경우, 문제는 이해했으나 풀이 과정이 틀린 경우, 또는 풀이 과정은 옳으나 계산 과정이 미흡하여 실제로 결과를 나타내는 부분이 틀린 경우 등 여러 가지 반응을 나타낸다. 실제로 학생들의 문제 풀이를 평가하는 데 있어서 가장 어려운 부분은 여러 가지 유형의 오류들을 드러내는 풀이를 어떻게 평가할 것인가를 결정하는 일이다. 이때 풀이 과정을 중시하여 채점하는 방법으로는 '분석적 점수화 방법'과 '총체적 점수화 방법'을 들 수 있다(Charles, et. al., 1987).

먼저 '분석적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 단계(과정)를 구체화하여 각 단계별로 채점 요소를 세우고 점수를 배당하는 방법을 말한다. 이때 어떤 특정 요소에 대한 채점 결과가 다른 요소에 대한 채점 결과에 영향을 주어서는 안 되며, 각 문항마다 채점 요소를 지나치게 세분화하지 않도록 한다. 분석적 점수화 방법은 학생 개개인의 답안지를 면밀히 분석해야 하므로 채점하는 데 많은 시간을 필요로 하지만, 주어진 문제의 해결 과정에 따라 단계별로 수치화한 점수를 부여함으로써 채점자 간의 평점 차를 줄이고 동일한 채점자 내에서도 일관성 및 객관성을 유지할 수 있다는 것이 주요 장점이다. 한편 '총체적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 특정 내용이나 과정에 대하여 각각 점수를 부여하는 대신, 풀이 전반에 걸쳐 하나의 점수를 부여하는 방법을 말한다.

서술형 및 수행 평가 문항의 채점을 위한 채점 기준은 주로 분석적 점수화 방법을 토대로 문제 이해, 문제 해결 과정, 답 구하기 등의 과정이 반영되도록 작성한다. 이를 작성하는 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 적절히 부여하도록 한다. 다음은 서술형의 문항에 대한 채점 기준을 분석적 점수화 방법으로 제시한 예이다.

【문항】

작년에 A 중학교의 학생 수는 1050명이고, 금년에는 작년보다 남학생은 4% 증가하고 여학생은 2% 감소하여 전체적으로 9명이 증가했다. 금년의 남녀 학생 수를 각각 구하여라.

【모범 답안】

작년의 남학생의 수를 x, 여학생의 수를 y라고 하면

$$\begin{cases} x+y=1050 \\ \frac{4}{100}x-\frac{2}{100}y=9 \end{cases}$$

이므로 $x=500$, $y=550$이다.

따라서

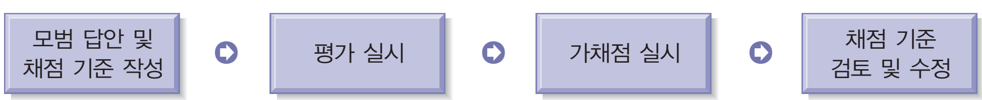
금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times500=520$(명)

금년의 여학생의 수: $550-\frac{2}{100}\times550=539$(명)

【채점 기준】

영역 / 요소	채점 요소	배점
문제 이해	작년의 남학생 수를 미지수로 정하기	1점
	작년의 여학생 수를 미지수로 정하기	1점
해결 과정	작년의 학생 수에 관한 식 세우기	1점
	작년보다 늘어난 금년의 학생 수에 관한 식 세우기	3점
답 구하기	금년의 남학생 수 구하기	2점
	금년의 여학생 수 구하기	2점
총점		10점

서술형 및 수행 평가 문항에 있어서 모범 답안은 채점 기준을 작성하는 데 있어서 구체적인 지침의 역할을 한다. 문항의 특징이나 성격에 따라 다르겠지만, 일반적으로 수학 교과의 특성상 피험자가 다양한 창의성을 발휘하여 평가자가 생각하지도 않았던 여러 가지 형태의 답을 제시할 가능성은 그리 높지 않다. 하지만 서술형 문항의 경우에는 답안을 작성하는 과정에서 실수나 오답의 가능성이 높으므로 이에 관한 채점 기준을 마련하여 채점 결과의 공정성을 유지해야 할 것이다. 이에 따라 모범 답안과 그에 따른 채점 기준을 구체적으로 마련하고 평가를 실시한 후 이미 작성된 채점 기준(안)을 토대로 일부 학생들의 실제 답안을 '가채점'하는 일은 매우 중요하다고 하겠다. 이는 채점 기준의 요소 중에서 채점자(교사)가 미처 생각하지 못하였던 채점 요소나 부적절하게 배당된 요소별 점수가 있는지를 검토하고, 미비한 부분을 보완 · 수정하기 위함이다. 위와 같은 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

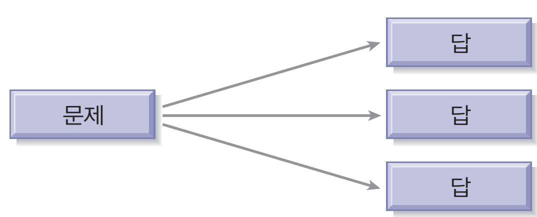


[그림 Ⅴ-2] 채점 절차

06 프로젝트

가. 프로젝트의 의미

프로젝트의 사전적 의미는 '실행 계획서'이지만, 수학 교육에서 프로젝트는 보다 넓은 의미로 무엇을 할 것인가뿐 아니라 그것을 실제로 수행하여 자료를 제시하고 그 결과를 평가하는 것을 포함한다. 프로젝트는 열린 반응을 요구하는 일종의 수행 과제를 말하며, 이때 개방형 문제, 즉 열린 반응(open-ended, open-responded) 문제는 해답이 정해져 있지 않고 학생의 관점에 따라 여러 가지 답이 나올 수 있는 문제를 말한다. 하지만 경우에 따라서 개방형 문제의 답은 모범 답안이 제한되지 않을 수 있다. 즉 결정되지 않을 수도 있다.



[그림 Ⅴ-3] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

【개방형 문제의 예】

숫자 4를 네 번 사용하고 $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ }$, 분수 등의 기호를 써서 0부터 9까지의 수를 만들어 보아라.

【풀이】

$$0=4+4-4-4=44-44$$

$$1=\frac{4}{4}+4-4=\frac{44}{44}=\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{4}{4}\div\frac{4}{4}$$

$$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=4-\frac{4+4}{4}$$

$$3=\frac{4+4+4}{4}$$

$$4=(4-4)\times4+4=\sqrt{4+4+4+4}$$

$$5=\frac{4\times4+4}{4}$$

$$6=\frac{4+4}{4}+4=\frac{4+4+4}{\sqrt{4}}$$

$$7=\frac{44}{4}-4=\{4-(4\div4)\}+4$$

$$8=4+4+4-4=\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$$
$$=4\times4\div4+4=4\times4-(4+4)$$

$$9=4+4+\frac{4}{4}$$

학생들은 열린 반응의 과제들을 수행하기 위하여 어떤 수학적 지식을 사용해야 하는지를 결정해야 할 뿐만 아니라 때로는 어떻게 접근해 나아가야 할 것인가에 관한 수학적 방법까지도 결정해야 한다. 이에 따라 프로젝트는 학생들의 실제 생활과 직접 관련되어 그들의 고등 사고 능력을 발휘할 수 있는 문제 상황을 주제로 제시함으로써 과정 중심의 수행 경험을 하게 한다.

나. 프로젝트의 특징과 개발 시 유의점

프로젝트의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 프로젝트는 어떤 특수한 상황에서 개인이 원하는 바의 깊이 있는 탐구를 가능하게 하므로, 프로젝트의 주제 및 진행 과정을 개별화 또는 차별화하여 개성에 맞게 다룰 수 있다.

둘째, 프로젝트는 구체물에서 서적, 영화, 비디오 등의 매체에 이르기까지 다양한 자료에 대하여 수학적으로 해석하고 설명하는 과정을 포함하므로, 다른 교과 내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적인 사고 능력을 신장시킬 수 있다.

셋째, 프로젝트는 소그룹의 협동 학습을 통하여 학생들이 자신이 속한 집단의 다른 구성원들과 이야기하고 그들의 활동 결과를 학급 전체에 (말하기와 쓰기의 형태로) 전달함으로써 의사소통 능력을 신장시킬 수 있다.

한편 다음은 프로젝트 개발 시 유의해야 할 사항이다.

첫째, 프로젝트는 학생들이 수학적인 안목에서 현상을 파악할 수 있는지, 또는 배운 수학적 지식을 사용하여 생활의 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 것으로, 판에 박힌 문제(정형 문제)를 지양하고 참신하고 새로운 성격의 주제(문제)를 개발하도록 한다.

둘째, 프로젝트의 채점을 위한 채점 기준은 총체적 점수화 방법과 분석적 점수화 방법을 적절히 고려하여 작성한다. 서술형 문항의 경우와 마찬가지로, 프로젝트의 채점 기준(표)의 작성 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 부여하도록 한다.

다. 프로젝트의 채점 방법

프로젝트의 수행 과정은 다음 〈표 Ⅴ-4〉와 같은 기록지를 사용한 자기 평가(self-assessment) 방법을 이용하여 학생 스스로 작성해 보게 하고, 이를 평가하거나 점검하는 것이 용이하며 바람직하다(황혜정 외, 1997).

〈표 Ⅴ-4〉 학생 자기 평가 기록지(예)

학생 자기 평가 기록지
단원명: ____________________   날　짜: ______년 _____월 _____일 _____교시   이　름: ____________________　(_____학년 _____반 _____번)
주제(문제):
해설(풀이):
반성(소감):
자기 평가: 아주 못함(　　)　못한 편임(　　)　잘한 편임(　　)　아주 잘함(　　)
교사 논평:

점선을 따라 자르세요.

한편 프로젝트의 전반적인 활동 과정 및 결과에 대하여 평가하고자 할 때, 다음과 같이 관찰에 의한 평정척도지를 활용하면 편리하다(Krulick 외, 1998).

〈표 Ⅴ-5〉 평정척도법을 이용한 과제 수행 능력 평가(예)

이름: ________________ 날짜: ________________

평정척도

1=불충분 2=만족 3=훌륭함

관찰(면담) 요목			0	1	2	3	논평
과제 수행 능력	주제 이해						
	해결 전략 선정						
	계획 수행						
	검토 및 반성						
	의사소통						
	태도						

07 관찰 및 면담

가. 관찰 및 면담의 특징

관찰 및 면담에서 평가자는 수학 문제의 해결을 위하여 사고하고 있는 개인, 소집단, 또는 학급에 대하여 관찰 내지 면담을 하면서 기록하게 된다. 이 방법은 수학적인 수행 능력과 같은 인지적 영역뿐 아니라 수학에 대한 태도와 신념 등 정의적인 영역까지 평가할 수 있는 장점이 있다. 또한 관찰 및 면담은 검사를 통해 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있다. 하지만 우리나라 교육현실을 감안할 때, 독자적인 평가 기법으로서의 역할보다는 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완하는 보조 역할의 의미가 크다.

특히 관찰의 목적으로 사전에 생각하지 못하였던 측면에 대하여도 부수적인 자료를 수집할 수 있다. 또 관찰은 정규 수업 시간 중에 자연스럽게 이루어질 수 있고, 특정한 사고력에 중점을 두고 평가할 수 있으며, 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완할 수 있다.

관찰이나 지필 검사와 더불어 면담은 학생들과 직접 대화함으로써 문제 해결 상황에서 실제로 나타내 보인 행동이나 서면의 '결과'를 도출해 내기까지의 사고 '과정'에 대한 통찰을 가능하게 하는 기법이다. 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

나. 관찰 및 면담의 유형

실제로 현장에서 사용할 수 있는 관찰법은 수업 시간에 교사가 학생들을 대상으로 실시하는 비참여 관찰로, 학생 전체 또는 소집단이나 개인별로 자연스럽게 행해질 수도 있다. 다만 교사가 수업을 진행하면서 관찰 결과를 기록할 수 있는 시간이 한정되어 있으므로, 학급 전체보다는 개별 또는 소집단을 대상으로 관찰을 실시하는 것이 효과적이다. 그런데 사실 비참여 관찰의 경우 객관적으로 관찰이 가능하나 관찰의 기회가 적고, 심리적으로 격리되어 있기 때문에 미세한 변화를 파악하기 힘들다.

한편 공식적 면담은 면담자가 미리 만들어진 일련의 질문을 가지고 응답자에게 질문하는 방법이다. 이때 각 면담에서는 똑같은 질문이 똑같은 방법으로 부과되므로, 공식적 면담은 질문지를 언어로 표현하는 방법이라고 볼 수 있다. 이에 반해 비공식적 면담은 면담 계획을 세우되 면담 목적만을 명백히 하여 융통성 있는 접근을 시도하는 방법이다. 따라서 연구자(교사)가 한 현상에 관한 적절한 질문들을 충분히 가지고 있지 않을 때 유용하다. 이러한 면담은 예정된 '질문군'이 없고 본질적으로 탐색전부터 시작한다고 볼 수 있다.

결국 면담이 공식적으로 진행되든 비공식적으로 진행되든, 교사는 주로 정규 수업 외의 상황에서 학생들과의 면담을 통해 그들과 직접 대화함으로써 그들이 수학 수업 상황에 어떻게 수용하고 대처하는지에 대해 보다 깊은 이해를 구할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 (비공식적) 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

특히 공식적 면담은 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별하는 데 유용하며, 비공식적 면담은 그들을 진단, 선별하는 것뿐만 아니라 그들의 능력에 따른 처치도 가능하다. 면담은 주로 개별적으로 진행하는 것이 상례이지만, 비공식적 면담의 경우에는 소그룹별로 면담을 진행하여 면담 대상자들끼리 보다 자연스러운 분위기에서 진행됨으로써 보다 정확한 정보를 얻을 수 있는 이점도 있다.

다. 관찰 및 면담 시 유의 사항

일반적으로 관찰을 통해 정기적으로 기록하여 평가하기 위해서는 관찰자인 교사의 많은 시간과 노력이 절대적으로 필요하며, 관찰 목적에 알맞은 현상을 포착하기 어려울 때도 있다. 또한 학생들의 반응을 관찰할 때 편견

을 가지게 되어 관찰 결과에 주관성이 개입될 여지가 있으며, 관찰의 대상이 되는 학생들 역시 관찰자인 교사를 의식하면서 행동이 달라질 수 있다. 사실 교사가 관찰만을 통하여 학생들의 다양한 행동이나 사고 과정 등을 정확히 파악하기는 어렵다.

관찰 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 뚜렷한 관찰 목적 또는 문제 의식을 가지고 관찰에 임하도록 한다.
- 관찰 계획을 치밀하게 세워야 한다.
- 부분과 전체의 관련을 지으며 관찰함으로써 피상적인 관찰이 되지 않도록 해야 한다.
- 객관적인 태도로 관찰해야 한다.
- 관찰 기간은 짧게 하고 누적시키는 방법을 쓰도록 한다.

공식적 면담의 경우에는 면담 도중 학생의 반응에 개입하는 일이 없으므로, 사전에 질문 내용들을 신중히 계획하여 작성하면 별 문제가 없으나, 비공식적 면담에서는 교사가 학생의 반응에 따라 수시로 질문하게 되므로 더욱 주의를 해야 한다.

면담 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 면담 시 교사의 반응이나 질문으로 인해 대화의 방향이 바뀌어서는 안 되므로 교사의 태도(반응)는 중립적 입장을 취해야 한다.
- 질문의 내용과 시기가 적절해야 한다.
- 학생이 편안하고 안정감을 가지도록 면접 환경과 조건을 구성해야 한다.
- 교사가 면담 시 기본적으로 갖추어야 할 태도는 중립적인 태도, 공정한 태도, 자연스러운 태도, 담화적인 태도, 친절한 태도이다.

라. 관찰 및 면담의 기록 방법

관찰 및 면담의 목적이 결정되면 대상, 장소, 시간, 기록 유형 등의 세부 계획이 진행되어야 하며, 이때 활용될 수 있는 기록 방법에는 체크리스트와 평정척도법 등이 있다.

체크리스트나 평정척도법은 사전에 관찰할 행동 요목을 제작하는 과정에서 많은 시간과 노력이 요구되지만, 그 기록 자료를 재분석하지 않고 평가 자료로 수월하게 활용할 수 있다. 그러나 체크리스트나 평정척도법은 사전에 치밀하게 관찰 요목을 작성하여도 임의적이고 예측하지 못하는 행동이 발생하는 경우에는 적절한 기록을 수행하기가 곤란한 단점이 있다.

관찰 및 면담의 자료(정보)를 수집하면, 그다음 단계로 그 정보들을 요약하고 행동의 패턴을 결정하는 작업이 필요하다. 물론 기록 형태에 따라 정보를 요약하는 방법이 다양하게 개발될 수 있다. 일반적으로는 관찰에 의해 기록된 자료들을 그래프 및 빈도, 시간, 가중치의 평균 등의 기술 통계 수치로 분석한다. 그러나 학교 현장에서는 기록된 자료를 진술문 형태로 요약하여 교사의 전문적 판단에 따라 필요한 조언을 하는 것이 보다 수월하고 바람직하며, 이는 학교생활기록부에서 각 교과에 대한 학생의 발달 상황을 작성하는 기초 자료가 될 수 있다.

관찰 및 면담은 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제 집착력과 의지, 창의적 사고, 수학 수업에의 참여 등 정의적 영역을 평가하는 데 용이하다. 다음 <표 Ⅴ-6>은 여러 정의적 영역에 대한 평가를 위하여 체크리스트를 사용하여 관찰 또는 면담이 가능한 구체적인 요목들을 제시한 예이다(박선화 외, 2010).

〈표 Ⅴ-6〉 정의적 영역 평가를 위한 체크리스트지(예)

체크리스트					
정의역 영역	관찰(면담) 요목	학생 1	학생 2	학생 3	학생 4
수학에 대한 흥미와 호기심	• 수학을 하는 것을 즐거워한다.				
	• 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다.				
	• 수학 수업 시간을 기다린다.				
	• 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다.				
	• 수학의 개념이나 원리를 알려고 한다.				
수학에 대한 자신감	• 수학 공부에 자신감을 가지고 있다.				
	• 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다.				
	• 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다.				
	• 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.				
수학에 대한 불안	• 수학 수업이 어려울까 봐 걱정한다.				
	• 수학 성적이 나빠질까 봐 걱정한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 긴장한다.				
수학의 유용성 인식	• 수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다.				
	• 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.				
과제 집착력과 의지	• 수학 공부를 열심히 한다.				
	• 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다.				
	• 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다.				
	• 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.				
창의적 사고	• 다른 사람의 방법을 그대로 따라 하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.				
수학 수업에의 참여	• 수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다.				
	• 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다.				
	• 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.				

VI. 좋은 수업의 의미

01 좋은 수업에 대한 관점의 변화

어떤 수업이 좋은 수업인가에 대한 견해는 구성주의 이론의 도래와 함께 바뀌기 시작하였다고 볼 수 있다. 구성주의 인식론에서는 지식을 개인이나 집단이 적극적으로 만들어 낸 경험적 구성물로 본다. 즉, 학생들은 모든 지식을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 학생 스스로 능동적 구성 활동에 의해 이를 형성한다는 것을 그 주된 요지로 삼고 있다. 이와 같은 관점에서 생각해 볼 때 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 개념을 탐구하고 개념 사이의 관련성을 잘 이해할 수 있도록, 다시 말해 구성 활동이 잘 일어날 수 있도록 총체적인 환경을 조성해 주는 것이다.

학습 기회의 제고라는 측면에서 좋은 수업을 진단할 때, 학습 기회란 수업을 통해 가르쳐진 것과 평가되어지는 것 사이의 중복 정도를 의미한다. 이는 수업 중에 다루어지는 교육과정의 내용과 평가의 내용이 수업의 주요 목표를 반영해야 함을 뜻한다. 그러므로 1980년대 이래로 교육과정의 개정은 교사가 아닌 학생 중심의 교육을 강조하고, 실생활과 학교 교육 내용을 연결시키며, 단순 암기나 훈련보다는 이해와 사고에 초점을 두어 왔다.

따라서 진정한 학습은 일상의 학습 상황에서 다양한 정보와 같은 인지적 도구 혹은 다른 사람들의 도움을 받아 학생들이 확실하게 어떤 문제 상황을 파악할 수 있을 때 일어난다고 볼 수 있다. 그러므로 학습자는 문제를 해결하면서 개개인이 직접 이미 알고 있던 지식을 사용하여 새로운 지식을 만들어 내는 과정을 통하여 자신의 생각을 다양한 방법으로 적용하고 또 새로운 의미를 창출함으로써 그와 관련된 내용을 이해하게 된다는 것이다(von Glasersfeld, 1993).

다시 말하면 구성주의에 입각한 수학 수업의 방법은 어떤 개념을 습득함에 있어서 고정되고 활동력이 없는 인식이 아닌 가변적이고 유용한 인식의 발달을 강조한다. 학습은 사회 활동을 하는 가운데 일어나며 학습자들 간, 혹은 교사와 학생 사이에 생각이나 아이디어를 서로 교환함으로써 이해를 증진시킨다(남승인, 1998). 이때 교사는 학생 스스로가 의미 있는 학습 활동에 참여할 수 있도록 도와주어야 한다. 아울러 학습자는 능동적이고 무한한 잠재력과 가능성을 가지고 있다고 보며, 따라서 학습자 개개인의 생각과 아이디어를 학습 활동에 최대한 반영하여야 한다는 것이다. 이렇게 볼 때 중앙집권식 교육과정의 편성 · 운영을 탈피하고 현장 중심으로 전환함으로써 학습자들을 보다 창의적인 교육과정에 의해 가르칠 수 있게 된다고 본다(최승현 외, 2002).

〈표 Ⅵ-1〉 좋은 수업을 위한 교수-학습 관점의 변화

교수-학습 관점의 변화		
강의식 전체 수업, 교사의 지시 중심 수업	➡	경험적, 귀납적, 실제적인 학습
수업 시간 중 학습자의 수동성: 좌석에 앉아 있기, 정보를 듣고 암기하기	➡	수업 시간 중 학습자의 능동성: 모든 학생들이 학습에 직접 참여하기
학습지, 시험지, 연습지 등의 활동	➡	고등 사고력을 강조한 중심 개념과 원리 배우기
모든 교과 영역의 많은 학습량을 교사가 직접적으로, 간단히 다루기	➡	학습의 과정(계획, 정리, 관찰, 평가)에 대한 학습자의 책임하에 학습자 자신이 직접 연구 과제를 결정하기
어떤 사실이나 사항을 단순 암기하기	➡	학습자 개개인의 정의적인 요구나 다양한 인식 양식에 관심을 가지기

성적이나 학업 경쟁을 강조하기	➡	교실을 독립된 작은 사회로 만들기 위한 협동 또는 합작 활동
능력별 그룹을 만들거나 능력별 이름 붙이기	➡	다양한 능력의 학생들을 같은 그룹에 배치하여 활동하기
특별 프로그램을 대용하기	➡	교사, 학부모, 학교 직원들의 다양하고 협동적인 역할을 활용한 일반 학급에서의 특별 지도
표준화 검사를 사용하기	➡	교사들의 관찰로 얻어진 질적 형태의 기술적 평가 사용하기

02 수학과 좋은 수업의 조건

수학과 교과 특성을 반영한 '좋은 수업'이란 '좋은 수업'에 대한 범교과적 정의와 그 궤도를 함께하면서, 수학 수업과 관련하여 현장의 교사들이 제기하는 문제점들을 효과적, 현실적으로 해결해 나가고 있는 수업들이라는 가정하에, 현장의 수학과 수업 지도와 관련하여 제기되어 온 문제점을 감안한 수학과 좋은 수업 선정 기준은 다음과 같다(최승현 외, 2002).

가. 교육과정과의 일관성을 유지하면서 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업이어야 한다.

현장의 수학 교사는 수학과 목표와 본질에 부합되면서 학생들의 요구, 능력 및 흥미에 알맞게 교육과정을 재구성할 필요가 있다. 실제로 좋은 수업을 진행하는 교사는 장기적인 기대, 학습 목표, 계획, 학습 활동, 자료 및 평가의 모든 측면을 포함하여 교실 수준에서 실행된 교육과정을 계획, 실천 및 평가하여야 한다(NCTM, 1993). 그뿐만 아니라 수업 목표와 목표 달성을 위하여 모든 교육과정의 요소들을 결합한 일관성 있는 체제를 유지해야 한다.

교육과정과 학습 내용 사이의 일관성을 유지하는 것은 학생들로 하여금 유의미한 지식을 구성할 수 있도록 한다. 즉, 학생들이 학교 밖 생활에서도 쉽게 접근하여 활용할 수 있는 지식을 구성할 수 있도록 하여야 한다. 이때 교사는 (1) 수학과 교육과정과 일관성을 유지하면서 핵심적인 내용들을 심도 있게 학습할 수 있도록 학습 내용의 폭을 줄이고, (2) 학습 내용을 중요한 개념 중심으로 구조화하여 제시하며, (3) 주요 개념들과 그들 사이의 관련성을 쉽게 설명할 수 있도록 교육과정 내용을 재구성하고, (4) 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업의 결과를 반영하는 학습 활동과 평가 방법을 학생들에게 제공해야 할 것이다.

나. 수학 수업에서는 수학적 경험이 실생활에 활용되는 가치 있는 것임을 학생들이 인식하여 실생활의 수학적 상황에 전이될 수 있도록 해야 한다.

현장의 수학 수업에서의 문제점은 현실과 유리된 많은 양의 수학적 지식을 교과서나 틀에 박힌 수업 양식에 의존하여 가르친다는 것이다. 좋은 수학 수업을 위해서는 학생들 스스로 문제를 이해하고, 문제 해결의 과정에 관련된 다양한 전략들을 활용하여 실제적으로 문제를 해결하며, 그 과정을 반성해야 한다. 즉, 학생들이 설계한 문제 해결 활동이 이루어지는 기회를 제공하여야 한다. 학교에서 배운 수학이 학교 밖의 다른 실제 상황들에서 활용될 수 없다면, 수학을 학습할 필요성이 줄게 된다. 즉, 학교에서 배운 수학 지식은 실생활에 적용될 때 보다 유의미해진다. 따라서 좋은 수학 수업이란 학생들이 수업 시간에 배운 지식, 이해, 추론 및 문제 해결을 다른 학문 분야에는 물론 실생활 상황에도 적용할 수 있도록 가르치는 수업이다. 장래에 수학이나 과학과 관련된 직업에 종사하게 될 학생들뿐만 아니라 교양을 갖춘 시민이

되기 위하여 학교 수학 교육은 우리가 살아가고 있는 현실 세계에 대한 이해와 흥미를 길러 줄 수 있어야 한다(OECD, 2001).

학교에서는 도형의 넓이나 부피에 대하여 배우지만 실생활에서 어떻게 활용되는지, 어떤 경우에 필요한지를 파악하지 못한다면 이러한 내용들을 학습하는 의미가 반감된다. 그러므로 수학 교사들은 학교 수학을 대학 입시를 위한 과목으로만 중요하게 취급할 것이 아니라, 현실 세계를 살아갈 수 있는 수학적 소양을 갖춘 시민을 양성한다는 취지를 잊지 말고 가르쳐야 할 것이다. 이러한 맥락에서 수학 교사의 중요한 역할은 수학적 능력이 지역 공동체 속에서, 학생들의 일상생활 속에서, 나아가 보다 광범위한 사회적 당면 과제들 속에서 어떻게 적용되는가를 학생들이 파악할 기회를 제공하여야 한다(NCTM, 1989, 1991). 그러므로 학교에서 배운 것을 다른 상황으로 전이할 수 있는 학생의 능력 양성을 위해 교사는 다음과 같은 측면을 강조하여 수업하여야 한다.

- 적절한 수준의 내용을 이해하지 않고서는 실생활로의 학습 전이는 기대하기 어려우므로, 학습한 내용을 숙달하도록 한다.
- 학생들이 학습한 내용에 대하여 다른 상황으로 전이할 수 있음을 인식하도록 한다.
- 학습한 내용과 관련된 교과 내 다른 영역과 타 교과 영역에 적용하도록 한다.
- 학생들이 스스로 학습하고, 스스로 평가한 결과를 피드백할 수 있도록 돕는다.
- 단순 암기보다는 이해를 추구하는 수업을 진행한다.

다. 수학 수업은 현대의 수학 지식을 반영하는 내용과 첨단 기술의 발달을 반영한 기술과 도구의 학습이 요구되므로 컴퓨터, 멀티미디어 및 다른 기술 등과 통합되어야 한다.

수학이 생성되고 응용되는 방법이 현대화되면서 학생들이 배워야 하는 수학적 아이디어나 수학적 입장도 변화되고 있다. 예를 들어 학교 수학에서는 규칙이나 공식으로 설명될 수 있는 필연적인 사건을 주로 다루는 반면, 실생활의 현상에서는 임의의 모델인 경우가 대부분이다. 이러한 변화의 원동력은 컴퓨터의 보급이다. 컴퓨터의 도입으로 지금까지는 생각지 못했던 새로운 유형의 문제를 만들 수 있게 되었고, 수학의 내용과 방법도 많이 달라졌다. 예를 들어 연속적인 것에서 이산적인 것으로, 정확한 것에서 반올림한 값으로, 추상적인 것에서 구체적인 것으로, 이론적인 것에서 경험적인 것으로 변화되었다.

컴퓨터와 계산기는 수학적 아이디어와 응용을 탐구할 기회를 제공한다. 예컨대 저학년의 학생들도 계산기 자체를 수학적인 대상으로 생각하며 계산기의 기능과 규칙을 배울 수 있다. 고학년의 학생들은 그래픽 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프, 함수의 변환을 탐구할 수 있으며, 그 결과 함수 관계를 전보다 더 쉽게 이해할 수 있을 것이다(신동선 외, 1998). 이와 같이 공학적 기술 도구의 사용은 학습 환경을 풍부하게 만들 뿐만 아니라 학습의 질을 향상시킨다. 즉, 학생들은 이러한 기술이 없었다면 불가능했을 활동들을 경험하고 참여할 수 있게 된다. 인터넷이나 모의실험(simulation) 등의 기술들은 수학과 실생활을 연결시키고, 나아가 학습 환경을 보다 넓은 범위로 확산시킬 수 있는 능력을 가지게 한다.

라. 학생들의 선행 지식(기존 지식)을 고려한 수학 수업이어야 한다.

좋은 수학 수업은 새로운 지식을 선행 지식에 관련시킬 수 있는 수업이어야 한다. 그러나 학생들이 선행 지식을 지니고 있는 것만으로 바람직한 학습 결과를 가져오지는 않으며, 학생들이 선행 지식을 새로운 이해와 학습에 활용할 수 있도록 교사가 학습자의 선행 지식에 관심을 기울이고, 이러한 선행 지식을 수업의 출발점으로 활용할 때 비로소 학습이 촉진될 수 있다. 그러므로 수학과 좋은 수업을 위해서는 교사가 학생들이 이미 지니고 있는 선행 지식을 이끌어 내고, 직접적인 체험 활동이나 사고 활동을 통하여 새로운 개념을 도입하며, 나아가 학생들의 기존의 개념을 새로운 개념과 연결하여 통합적인 개념으로 수정해 나가야 한다(Driver 외, 1995).

이와 같이 학생들이 선행 지식을 활성화하여 수학과 학습에 활용할 수 있도록 수업을 할 때, 교사는 다음과 같은 측면을 고려해야 한다.

- 교사는 학생들이 가지고 있는 선행 지식이 무엇인가 정확히 파악하여야 한다.
- 교사는 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 활성화하도록 수업 시작 시 수업의 내용에 대하여 논의한다.
- 때때로 학생들의 선행 지식이 불완전하거나 치명적인 오개념을 포함하고 있을 수도 있으므로, 교사는 학생들이 지니고 있는 불완전하거나 잘못된 개념을 상세히 조사할 필요가 있다.
- 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 갖추지 못한 경우, 교사는 중요한 선수 학습 자료들을 미리 다루어 수업 진행에 차질이 없도록 해야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 학습 내용을 연관지을 수 있도록 적절한 질문을 제공하여야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 개념의 관계를 파악하고, 또 다른 형태의 통합적인 개념을 형성하도록 도와야 한다.
- 교사는 교수-학습에 관한 인지심리학의 이론에 초점을 맞추어 수업해야 한다.

마. 학습자 스스로 문제 해결 활동을 수행할 수 있도록 이끄는 수업이어야 한다.

좋은 수업이란 학생들로 하여금 주어진 수학 문제를 이해하고 그 풀이 과정을 추론하며 이를 이용하여 문제를 해결할 뿐만 아니라 교사나 다른 학생들에게 자신의 방법을 설명할 수 있도록 하는 일련의 학습 전략을 가르치는 수업이다. 보스니아도(Vosniadou, 2001)는 교사가 학생들에게 학습 전략들을 가르치기 위한 체계적인 노력을 할 때, 학생들이 실질적인 성과를 얻을 수 있다고 주장하였다. 이러한 학습 전략들은 학습 과정을 촉진하고 학습을 제고할 뿐더러 학생들이 주어진 상황에 적절한 방법으로 문제를 이해하며 이를 해결할 수 있도록 돕는다는 측면에서 중요하다. 그러므로 문제 해결에 있어서 보다 적용 범위가 넓을수록 성공적인 학습 전략이 된다.

여기서 중요한 것은, 교사는 학생들에게 단순히 수학적 지식의 전달과 수학을 하는 방법을 가르치는 것에만 국한할 것이 아니라 학생들에게 자신의 학습을 스스로 관리, 감독할 수 있는 메타인지 학습 전략을 가르쳐야 한다는 것이다. 구체적인 학습 기능과 내용도 중요하지만, 학습자가 스스로의 학습 과정을 감독하고, 학습이 일어나는 중에 자신의 마음에 어떤 변화가 일어나는지를 의식한다는 것은 보다 고차원의 학습을 위해 중요하다. 즉, 학생들은 주어진 학습 목표 달성을 위해 자신의 학습 진행 과정을 측정하고, 끊임없이 감독하고, 스스로 조절하며, 반성적으로 사고할 필요가 있다.

학습에서의 자기 조절(self-regulation)이란 학습자 자신이 스스로의 학습 과정을 평가하고 이해 수준을 점검하며, 필요시 실수를 수정할 수 있는 전략들을 개발하는 것을 포함한다. 교사는 다음과 같은 기회를 제공함으로써 학생들이 자기 조절적인 학습자가 되도록 도울 수 있다.

- 문제를 해결함에 있어서 학생 자신이 문제 해결 전략이나 방법을 계획하도록 한다.
- 사용 가능한 가장 효과적인 학습 전략들은 무엇이며, 이들을 어떻게 사용할 것인지를 알도록 가르친다.
- 학생 스스로 자신의 수학적 사고 과정을 점검하고, 이해 수준에 따라 문제가 요구하는 질문에 답할 수 있도록 한다.
- 주어진 진술문이나 주장, 문제에 대한 해결책 등에 대하여 평가하도록 한다.

바. 학생들의 동기 유발이 가능한 수학 수업이어야 한다.

일반적으로 학습에 대한 동기가 유발된 학습자는 설정한 목표를 달성하려는 열의가 있으며, 끈기와 의지를 가지고 학습 성취에 많은 노력을 기울이게 된다. 이는 수학 학습에 있어서도 마찬가지이다. 그러므로 학습자의 동기는 학습되는 양과 질에 영향을 미치게 되며, 수학 교사들은 동기 유발된 학습자를 원한다. 교사의 말과 행동은 학생들의 목표 달성 의지에 영향을 미치게 되며, 내적 동기가 유발된 학습자는 학습 성취를 위해 더 노력하게 된다. 교사가 학생들의 내적 동기 유발을 위해 취할 수 있는 행동들은 다음과 같다.

- 새롭고 흥미 있는 학습 과제를 제공함으로써 학생들이 호기심을 갖고 고차원의 사고 기술을 사용하도록 장려한다.
- 학생들의 성취를 외적인 요인이 아닌 내적인 요인들로 귀착시키고 스스로의 수학적 능력에 대하여 자신감을 가질 수 있도록 격려한다.
- 학생 각각의 수준에 실현 가능한 목표를 설정하도록 조언한다.
- 학생들의 수학적 성취를 인정하고, 그 결과에 대하여 정직하게 평가한다.
- 학생들의 성취 결과를 내적 동기를 유발할 수 있는 언어를 사용하여 피드백할 뿐만 아니라 학생들이 활용하는 학습 전략을 개선할 수 있도록 그 방법을 제공한다.

사. 지식 위주의 평가보다는 실제 상황에 기초한 평가 방법을 수반하는 수학 수업이어야 한다.

실제 상황에 기초한 평가 방법 중 하나인 수행 평가는 그 목적과 수행 과정, 그리고 평가 결과가 모두 일치하고 있다. 바람직한 평가는 수업에서 다룬 내용에 대하여 평가하고, 평가가 수업과 일관될 뿐만 아니라 의도한 학습 목표와 일치하며, 나아가 수업의 방식과도 일관성을 유지하는 평가이다. 예를 들어 고차원의 분석과 추론 기술을 활용한 수업에서 학습한 것을 선다형 객관식 문항으로 평가하는 것은 수업의 방법과 평가 사이에 일관성이 결여된 경우이다. 교육 개혁의 중요한 한 부분을 차지하고 있는 수행 평가는 실생활 과제와 상황에서 학생들의 수행 능력을 측정하고 반영하는 것이다.

좋은 수학 수업에는 수업에서 기대되는 학습의 본질, 사용된 학습 자료, 일관성을 유지한 다양한 평가 전략들이 포함된다. 수학과 좋은 수업에서의 평가는 학생들에게 기대되는 것과 결과에 대한 명확한 의사 전달이 요구된다. 이때 평가는 수업과 일관성 있게 통합되어 서로에게서 유용한 정보를 얻을 수 있도록 한다. 수업과 평가를 통합하기 위하여 교사들은 다음 사항들을 주목하여야 한다.

- 학생들에게 도전적이고, 학생들의 발달 단계상 적절한 학습 표준을 개발한다.
- 학생들 사이의 개인차를 적절하게 고려한다.
- 학생들의 수학에 대한 이해 발달을 도울 수 있는 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 상호 양립 가능한 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 다양한 방법과 도구를 활용하여, 학생들의 과학적 추론 기술과 과학 개념의 이해에 대하여 체계적으로 자료를 수집한다.
- 학생들이 그들의 지식, 이해 수준 및 기술을 다양한 방법으로 증명할 수 있는 기회를 제공한다.
- 다양한 수준에서 다양한 방법으로 이루어진 평가 결과들을 교수-학습의 개선을 위해 활용한다.

학교 현장에는 학생들의 수준을 고려한 학생 개인 수준에 맞는 학생 중심 교육과정이 구현되어 있는데, 교사뿐만 아니라 교장, 교감 차원에서도 이에 적합한 평가 방법을 생각해 보아야 한다. 모든 실제 상황에 기초한 평가의 시행 및 운영을 교사에게만 맡긴다는 것은 교사에게 지나친 부담이 될 수도 있다.

VII. 수학과 수업 평가

01 수학과 수업 전문성의 의미

학교 교육에서 교사의 역할이 중요해지고 교사의 책무성에 대한 기대가 높아지면서, 세계 여러 나라에서는 우수한 교사를 확보함과 동시에 현직 교사의 전문성 발달을 촉진하고자 각별한 노력을 기울이고 있다. 이러한 상황에서 학생들의 학습을 평가하기 위한 활동과 평가 방법을 고안하고 그 효과를 경험한 교사들은 이러한 수업 전문성 기준의 유용성을 알고 있으며, 교사의 수업 전문성 평가에도 학생 평가와 같은 원리가 적용된다. 수업 전문성 기준에 비추어 교사의 수업 전문성을 평가(즉, 수업 평가)를 하기 위한 방법들이 제시되고 있으며, 이러한 평가의 시도 자체가 교사들의 좋은 수업 실행을 위한 하나의 기준이 될 수 있다.

구체적인 수학과 수업 전문성 기준 개발의 방향은 다음과 같다(임찬빈 외, 2006).

첫째, 수학 교사의 수업 활동을 총망라하는 포괄적인 기준을 제시한다. 다시 말하면 수학과 수업 전문성 기준은 교사의 수학 수업 전-중-후 활동인 수업을 준비하기 위한 과정-실제 수업 실행-수업 후 반성과 평가 · 향후 개선 노력 등을 종합적으로 다룬다.

둘째, 수학과의 모든 내용 영역에 공통적으로 적용할 수 있는 종합적인 기준을 제시한다. 즉, 특정 영역이나 단원에 국한하는 기준보다는 각 영역에 고루 적용할 수 있는 대표적인 기준을 중심으로 제시한다.

셋째, 각 기준 간의 상호 연계를 고려하여 제시한다. 즉, 수업의 흐름을 고려하여 각각의 기준을 독립적인 영역과 요소로 제시하되, 이들 간의 관계가 상호 의존적으로 연계됨을 보여 준다. 수업이란 복합적이고 다면적일 뿐만 아니라 수업의 제 양상은 상호 의존적이다. 이러한 다층적 위계 속에서 수업 평가 기준의 대영역을 설정하고 다시 중영역과 하위 요소로 세분하여 제시한다.

넷째, 목적과 상황에 따라 유연하게 선택할 수 있는 종합적인 기준 목록을 제시한다. 즉, 수학과 수업 평가 기준은 모든 수업에 획일적이고 고정적으로 적용하는 것이 아니라, 목적과 상황에 따라 기준들을 선정, 조합하고 수학과 각 영역의 특성에 따라 그것들을 변용하여 달리 적용할 수 있음을 고려한다.

다섯째, 수업 전문성 기준은 하나의 개별 기준도 다양한 방식으로 접근하여 판단할 수 있음을 전제하여 제시한다. 교사의 전문성과 수업의 양상은 한 가지 측면에서 살피기보다는 다양한 각도에서 접근하고 판단할 필요가 있다. 예전에는 주로 수업 활동에 초점을 맞추어 수업 평가가 이루어졌기에 교실 수업 관찰이 가장 강력한 평가 도구였지만, 수업 전문성은 수업 전-후의 활동을 모두 포함하므로 교실 수업 관찰만으로 기준의 달성 정도를 가늠하기 어렵다. 따라서 특정 기준이 달성된 정도를 판단할 때에는 전문성 기준 영역과 요소별로 다양하게 제시하고, 나아가 각각의 기준도 다양한 방법으로 적용할 수 있음을 전제한다.

여섯째, 수업 전문성 기준은 수업을 위한 장 · 단기적인 계획이나 단원 단위로도 활용할 수 있도록 충분히 고려하여 제시한다. 수업 전문성 기준의 적용은 하나하나의 수업에 국한하지 않으며, 수업 전-중-후를 포괄하여 설정하여야 한다.

요약하면, 수업 전문성 기준은 좋은 수업 활동의 실제를 특징짓는 요소들이라고 규정지을 수 있다. 그러므로 수업 전문성 기준은 (1) 초보 교사를 위한 지침, (2) 숙련된 전문가 교사를 위한 지침, (3) 개선 노력을 집중할 부분을 파악하는 구조, (4) 교사 집단 이외의 다른 공동체들과의 의사소통의 수단으로 사용될 수 있다.

교사의 수업 활동에 대한 전문성 기준이 마련되었을 때, 관계 당사자들은 공유된 개념과 가치 속에서 개선을 위한 노력을 어디에 집중할 것인지에 대한 논의를 할 수 있게 된다. 아울러 수업 전문성 기준에 교직의 임무와 역량, 우수한 교수 활동의 수준을 명확하게 규정해 놓음으로써 타 분야의 사람들로부터 신뢰받을 수 있고, 교직의 위상을 높일 수 있게 된다. 교사들은 교수 활동을 기술하는 공통된 용어의 가치를 익히 알고 있다. 또한 수업 전문성 기준은 교사들에게 '우수성'에 대한 합의된 기준을 제공함으로써 모범적인 교수 활동에 대한 교사들의 대화를 조직하는 역할을 한다. 이러한 대화를 통하여 경력자뿐만 아니라 초보자의 수행 수준을 향상시킬 수 있을 것이다.

한편 수업 전문성 향상을 위한 평가, 즉 수업 평가 기준에서 규정하는 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 주요 내용 학습에 참여할 수 있도록 지원하는 것이다. 수학과 수업 평가 기준의 구성 요소들은 이러한 목적하에 조직되며, 중요한 내용을 학습할 때 교사는 학생들과 함께 학습자 공동체를 조성해 나아가야 할 것이다.

대니얼슨(Danielson, 1996)은 초임 교사와 경력 교사들이 함께 활용할 수 있도록 보완한 수업 평가 기준을 제시하면서 복합적인 교수 활동을 4개 영역(계획과 준비, 교실 환경, 수업, 전문적 책임)으로 구분하였다(임찬빈 외, 2004, 재인용). 이 수업 평가 기준은 교사의 전문성 발달 단계를 파악하여 각 영역에 알맞은 해당 요소들을 제시함으로써 교사로 하여금 전문성을 계발하고 자기 반성에 활용할 수 있도록 하였다.

수업 평가 기준을 개발 · 실행하는 과정에서 교사는 공동의 연구를 해야 할 뿐만 아니라 평가 기준 개발을 뒷받침하는 원리와 목적에 대한 이론적 근거도 확보하여야 한다. 무엇보다도 수업 평가 기준을 개발하고 설계함에 있어서 주요 이해 당사자들인 교사, 전문가 집단, 정부 기관 등의 참여와 논의가 요구되며, 그에 대한 활용을 전제로 개발하여야 한다. 이때 주의해야 할 것은 교사 자신이 수업 평가 기준을 지원하는 결정적인 역할을 하여야 활용이 가능하게 된다는 점이다.

또한 수업 평가 기준은 자기 평가나 동료 평가, 상호 평가 등으로 활용될 수 있도록 보다 상세하게 개발되어야 하며, 교사의 가르치는 활동에는 일정한 기준이 있다는 점도 제시하여야 한다. 대부분의 교사들은 전문적인 교수 활동의 필수 요소들을 이해하고 있음에도 불구하고, 지극히 관념적인 수준에서 표현하는 경우가 흔히 있는데, 이 점을 특히 주의해야 한다. 동료 교사들뿐만 아니라, 학생, 학부모 및 사회의 다른 구성원들이 교사에게 요구하는 지식과 역량을 명시하는 수업 평가 기준은 좋은 교수 활동을 파악하고 알리며 보상할 수 있는 수단이 되기도 한다.

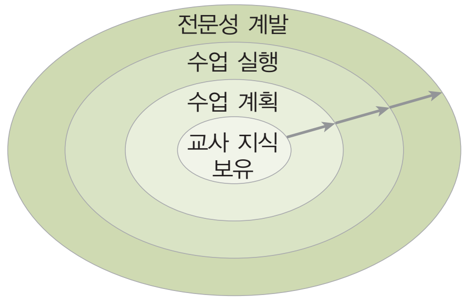
02 수학과 수업 영역 및 요소

가. 수업 평가 영역

수업 평가는 수업 전, 수업 중, 수업 후의 단계별로 진행할 수 있으며, 이러한 수업 단계는 '지식 보유', '수업 계획', '수업 실행', '수업 반성' 부문으로 구성되는데, 이는 교사가 좋은 수업을 하기 위해서는 다음과 같은 요건을 갖추어야 하기 때문이다.

- 교사가 알아야 할 것 ⇨ 지식 보유
- 교사가 준비해야 할 것 ⇨ 수업 계획
- 교사가 행해야 할 것 ⇨ 수업 실행
- 교사가 전문성 발달을 위해 해야 할 것 ⇨ 수업 반성

아는 것이 바로 수업의 실행으로 옮겨지는 것만은 아니지만, 일반적으로 교사가 계획을 세우고 준비하는 것은 수업에 영향을 주고, 이러한 모든 것은 실시한 수업에 대한 교사의 반성적 실천의 영향을 받게 된다. 이렇듯 [지식 보유] ⇨ [수업 계획] ⇨ [수업 실행] ⇨ [수업 반성]의 연계성이 있음을 나타내고 있다. [그림 Ⅶ-1] 참조



[그림 Ⅶ-1] 교사의 수업 단계

위의 [그림 Ⅶ-1]에서 알 수 있는 바와 같이, 교사의 ‘지식 보유’는 교사가 갖추고 있는 지식에 관한 이해 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, ‘수업 계획’은 본인이 준비한 수업 계획 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, ‘수업 실행’은 본인이 계획한 대로 수업을 충실히 실행하였다고 생각하는가, 그리고 ‘수업 반성’은 본인의 수업 실행 결과에 만족하는가 등을 반영하기 위한 것이다.

수업 평가를 위한 세부 영역 및 이에 관한 설명은 다음 〈표 Ⅶ-1〉과 같다.

〈표 Ⅶ-1〉 수업 평가 영역

수업 평가 영역		수업 평가 영역에 관한 설명	비고(수업 평가 요소)
교과 내용	• 교육과정 이해 및 재구성	교육과정 목표 및 내용에 관하여 정확히 이해하고, 이를 적절히 재구성하여 수업에 반영하는 것	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기
	• 수학 내용	소양이 되는 학교 수학 및 학문 수학에 관하여 충분히 이해하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기
	• 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 충분히 이해하고, 이를 효과적으로 수업에 반영하는 것	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기
	• 수학적 가치	수학적 가치와 중요성을 충분히 인식하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기
학습자 이해	• 학습자 수준	학습자의 인지 수준, 선행 지식, 학업 성취 수준 등을 파악하고 이를 적절히 수업 시간에 반영하는 것	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기
	• 학습자 오개념	학습자의 오개념을 인지하고 이에 대처하는 것	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기
	• 학습 동기	학습자의 관심 및 흥미도를 파악하고 이를 고취시키는 것	학습자 수준이 반영된 적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기
	• 수학적 태도	학습자의 자신감, 신념 등을 파악하고, 이를 증진시키는 것	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기
	• 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 파악하고, 이를 수업에 반영하는 것	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기
교수 학습 방법 및 평가	• 수업 목표 및 내용 반영	교육 목표 및 내용을 파악하고 이에 적합한 교수 학습 방법을 수행하는 것	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결과 관련된 전반적인 활동을 인지하고 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기
	• 학습자 수준 및 태도 반영	학습자의 인지 수준 및 정의적 특성을 인지하고, 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통에 관해 인지하고, 이를 적절히 활용하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 평가 방법 및 절차 마련	수업 목표, 학습자 수준, 평가 목적 등에 따른 평가 방법 및 절차를 계획하고 마련하는 것	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기
	• 평가 도구 개발	학습 목표에 따른 평가 목표, 문항, 기준 선정 및 실행에 관하여 인지하고 이를 수행하는 것	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기
	• 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치를 위한 피드백 계획 및 실행을 교사가 인지하고 수행하는 것	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기
수업 상황	• 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료 등을 파악하고, 이를 준비하여 수업에 활용하는 것	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기
	• 교실 환경 및 수업 집단 조성	여러 도구 및 교구, 자료의 효율적인 활용성을 이해하고, 이에 맞춰 수업 환경 및 집단을 구성하는 것	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기
	• 학습 태도 및 수업 분위기 조성	교사가 해당 수업 내용에 관한 학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기를 인지하고, 이를 유도하는 것	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기
	• 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 또는 질문 등을 인지하고, 이를 효율적으로 대처하는 것	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기

나. 수업 평가 요소

수업 평가 영역에 따른 수업 평가 요소는 다음 〈표 Ⅶ-2〉와 같이 평정척도법을 이용하여 평정척도를 3단계 정도로 두는 것이 적당하며, 경우에 따라서는 5단계로 좀 더 세분화하여 사용하도록 한다.

수업 평가 요소를 수업 전(지식 보유 및 수업 계획), 수업 중(수업 실행), 수업 후(수업 반성)의 상황으로 세분화하여 제시하면 다음과 같다.

〈표 Ⅶ-2〉 수학 수업 평가 요소

수업 평가 영역		수업 평가 요소		평정척도		
				그렇다	보통이다	그렇지 못하다
교과 내용	1. 교육과정 이해 및 재구성	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 수학 내용	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 가치	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
학습자 이해	1. 학습자 수준	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 학습자 오개념	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 동기	적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 태도	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

교수 학습 방법 및 평가	1. 수업 목표 및 내용 반영	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습자 수준 및 태도 반영	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 평가 방법 및 절차 마련	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	6. 평가 도구 개발	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	7. 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
수업 상황	1. 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 교실 환경 및 수업 집단 조성	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 태도 및 수업 분위기 조성	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

따라서 이 수업 평가 틀은 교사가 자신의 수업 계획 및 진행, 그리고 반성을 통해 수업 개선은 물론, 더 나아가 교사 지식의 확장을 이끌 수 있도록 하는 데 도움을 줄 것이다. 이때 가급적 수업 후 즉각적으로 평가를 실시함으로써 자신의 수업 반성을 통하여 보다 수월하게 수업 개선이 이뤄질 수 있도록 한다. 또 학교 환경 및 수업 상황에 따라 동료 교사들과의 협력, 연구, 논의 등을 통하여 지속적으로 수업 개선을 도모하는 의지와 노력을 갖추도록 한다.

결론적으로 수업 평가 요소는 기본적으로 교사들이 어떤 지식을 보유하고, 그 지식을 토대로 수업을 계획하고 그 계획에 따라 수업을 실행하며, 더 나아가 반성 및 개선 여부에 활용되어야 한다. 만약 한 교사가 교과 내용, 학습자 이해, 교수 학습 방법 및 평가, 수업 상황 등에 관한 지식을 보유한다면, 수업 계획이나 수업 실행에서 교사의 보유된 지식이 고루 반영되어 드러나야 하며, 수업 반성의 측면도 마찬가지이다. 하지만 어떤 교사에 대해 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 부문을 동시에 판단하기는 무리이다. 일반적으로 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성의 네 부문 중에서 가장 진단하기에 용이하고 필요한 부문은 수업 실행 부문일 것이며, 또한 간편한 수업 평가를 위해서는 수업 실행 부문에 초점을 두어 교사 스스로 자기 평가를 수행하는 것이 좋다.

한마디로 교사가 자신이 수학 및 수학 교육 관련 지식을 어느 정도 보유하고 있는가에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 이 부문만을 스스로 점검하도록 한다. 마찬가지로 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 측면에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 해당 부문만을 선택하여 점검하도록 한다. 여기서 수업 계획과 수업 반성 측면의 평가 요소는 교사 자신의 교사 지식 및 전문성 향상을 위한 ‘자기 평가’ 용으로 활용 가능하다. 한편 수업 실행 측면의 평가 요소는 교사 자신은 물론 동료 교사의 판단에 따라 진단 및 평가가 가능하다. 이때 평가 요소의 활용 단위(즉, 얼마만큼 수업을 진행한 후 평가를 할 것인가)는 교사의 수업 여건이나 상황에 따라 결정하도록 한다.

VIII. 교과서의 구성

01 편찬 방향

이 교과서는 새로 개정된 교육과정에 따라 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 문제 해결력을 기를 수 있도록 하였다.

둘째, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 하여 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해하도록 하였다.

셋째, 자신의 생각을 표현하고 토론하며, 다양한 방법으로 수학적 내용을 다른 사람에게 설명할 수 있는 의사소통 능력을 기를 수 있도록 하였다.

넷째, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

02 구성과 특징

■ 대단원 도입

단원과 관련된 사진을 제시하고, 사회 현상이나 자연 현상에서 관찰할 수 있거나 적용할 수 있는 이 단원의 수학 내용을 소개함으로써 단원 학습의 의미와 흥미를 불어넣어 주도록 하였다.

■ 준비 학습

각 대단원을 공부하는 데 꼭 필요한 선수 학습 요소와 이에 대한 문제를 제시함으로써 학습에 필요한 선행 지식을 상기하고 학습의 위계를 알 수 있도록 하였다.

■ 중단원 도입

실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.

■ 생각 열기

새로운 내용의 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 소개하여 학생들에게 학습에 대한 흥미를 불러일으키고 내용 전개의 실마리를 제공하였다. 또한 이를 통하여 수학의 가치와 유용성도 느끼고 창의적인 생각을 키울 수 있도록 스토리텔링 형식을 빌렸다.

■ 탐구 활동

창의력 기르기와 관련된 물음이나 수학적 사고를 유발할 수 있는 물음과 활동을 통하여 새로 도입할 수학의 원리나 개념을 탐구할 수 있도록 하였다.

■ 예제

학습 내용과 관련된 대표적인 문제와 그 풀이 과정을 함께 제시함으로써 학생들의 개념 이해를 더욱 탄탄히 하고 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

■ 문제, 발전 문제, 실생활 문제

학습한 내용을 확인하는 기본 문제를 제시함으로써 학생들이 공부한 내용을 바르게 이해하였는지 스스로 점검할 수 있도록 하였다.

■ 창의 UP

생활 주변에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 원리와 법칙을 탐구하고, 수학의 개념을 깊이 생각해 보고 표현할 수 있게 하여 창의적인 생각을 기를 수 있도록 하였다.

■ 사고력 기르기(문제 해결, 추론, 의사소통)

여러 가지 문제를 창의적으로 해결하는 능력을 기르기 위해 생활 주변의 문제 상황을 탐색하고 해결하는 문제를 제시하였다. 또 수학적 사실을 분석하고 정당화하는 문제를 통하여 수학적으로 사고하고 추론하는 능력을 향상시킬 수 있도록 하였다. 더불어 수학적 개념을 말로 표현하고 토론해 보게 함으로써 다른 사람과 효율적으로 의사소통하는 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 단원 과제

중단원 도입과 관련된 구체적 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.

■ 중단원 기초, 기본, 실력

중단원에서 학습한 내용에 대한 문제를 세 가지 수준으로 나누어 제시하였다. 기초에서는 중단원 학습 내용 중 최소 필수 내용을 확인하는 문제를 제공, 기본에서는 중단원 학습 내용 중 기본 개념을 확인하는 문제를 제공, 실력에서는 중단원 학습 내용을 완벽히 이해한 학생들의 수월성 교육에 이용하여 수준별 학습에 도움이 될 수 있도록 하였다.

■ 수행 과제

대단원에서 학습한 내용 중 탐구 소재를 선정하여 실험 또는 분석을 하거나 조사나 관찰을 하여 그 결과를 조직하고 표현함으로써 종합적인 문제 해결 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 대단원 학습 내용 정리

대단원 학습을 마친 후 이 단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하고, 새로 배운 용어와 기호를 제시함으로써 학습 내용을 스스로 점검하고 보완할 수 있도록 하였다.

■ 대단원 평가 문제

대단원 학습을 종합적으로 평가하기 위하여 다양한 유형의 평가 문항들을 제시하였다. 또 마지막 두 문제는 서술형으로 제시하여 수학적 표현 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 공학적 도구(컴퓨터, 계산기)의 활용

단원의 내용 중에서 공학적 도구를 의미 있게 활용할 수 있는 학습 주제를 선정하여 인터넷, 컴퓨터, 계산기 등을 활용하는 방법을 제시함으로써 학습자의 흥미를 높이고, 효과적인 수업이 될 수 있도록 하였다.

■ 수학 플러스

단원의 끝에 이 단원의 수학 원리와 관련된 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 수학에 흥미를 불러일으키고, 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.

IX. 연간 지도 계획안

단원	중단원	차시	교과서 쪽수	지도 내용
Ⅰ. 지수함수와 로그함수	1. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프	1~9	10~27	01 지수함수와 그 그래프 02 로그함수와 그 그래프 03 지수함수와 로그함수의 활용 수준별 학습
	2. 지수함수와 로그함수의 미분	10~16	28~41	01 지수함수와 로그함수의 극한 02 지수함수와 로그함수의 미분 수준별 학습
	단원 마무리	17~18	42~47	
Ⅱ. 삼각함수	1. 삼각함수의 뜻과 그래프	19~34	48~79	01 일반각과 호도법 02 삼각함수 03 삼각함수의 그래프와 성질 04 삼각함수의 활용 수준별 학습
	2. 삼각함수의 미분	35~42	80~97	01 삼각함수의 덧셈정리 02 삼각함수의 극한 03 사인함수와 코사인함수의 미분 수준별 학습
	단원 마무리	43~44	98~105	
Ⅲ. 미분법	1. 여러 가지 미분법	45~54	106~125	01 함수의 몫의 미분법 02 합성함수의 미분법 03 역함수의 미분법 04 이계도함수 수준별 학습
	2. 도함수의 활용	55~63	126~143	01 접선의 방정식 02 함수의 그래프 03 방정식과 부등식에의 활용 수준별 학습
	단원 마무리	64~65	144~149	
Ⅳ. 적분법	1. 여러 가지 적분법	66~76	150~173	01 여러 가지 함수의 부정적분 02 치환적분법 03 부분적분법 04 여러 가지 함수의 정적분 수준별 학습
	2. 정적분의 활용	77~83	174~187	01 넓이 02 부피 수준별 학습
	단원 마무리	84~85	188~193	

※ 위 계획안은 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도 등에 따라 적절히 조정하여 운영할 수 있다.

X. 참고 문헌

- 강완, 백석윤(1998). 초등수학 교육론. 동명사.
- 교육과학기술부(2007). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2007-79호 별책 8).
- 교육과학기술부(2009). 2009 개정 교육과정 총론. 교육과학기술부 고시 제2009-41호.
- 교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 별책 8).
- 신이섭 외(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단 정책연구 2011-11.
- 이홍우(1999). 지식의 구조와 교과. 서울: 교육과학사.
- 임찬빈, 이화진, 곽영순, 강대현, 박영석(2004). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅰ): 일반 기준 및 교과(사회, 과학, 영어) 기준 개발. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2004-5.
- 임찬빈, 이화진, 최승현, 오은순, 이경언, 이수정, 노은희, 권순달(2006). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅲ): 일반 기준 및 교과(국어, 수학, 기술·가정, 음악, 초등) 기준 상세화. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2006-3.
- 조지민, 김명화, 최인봉, 송미영, 김수진(2007). 2006년 국가수준 학업성취도 평가 연구: 수학. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRE 2007-3-4.
- 박선화, 김명화, 주미경(2010). 수학에 대한 정의적 특성 향상 방안 연구. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRI 2010-9.
- 박순경(2010). 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정의 개선 방향 탐색. 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정 개선 방향 23-72. 국가교육과학기술자문위원회 교육과정위원회.
- 최승현(2002). 수학과 교육 내실화 방안 연구-좋은 수업 사례에 대한 질적 접근-. 한국교육과정평가원.
- 최승현, 황혜정(2007). 수학 수업 평가 기준 개발에 관한 기초 연구, 학교 수학, 9(3), pp.327~352.
- 황혜정, 김홍원, 박경미, 김수환, 김신영, 채선희(1997). 창의력 신장을 돕는 중학교 수학과 학습 평가 방법 연구. 한국교육개발원 연구 보고 CR 97-10-1.
- 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2012). 수학교육학신론(2012 증보판). 문음사.
- 황혜정(2012). 수학 수업에서 요구되는 교사 지식에 대한 평가 기준 재탐색. 한국학교수학교육학회 시리즈 E 수학교육논문집, 26(1), pp.29~55.
- Charles, L., Lester, F., & O'Daffer, P.(1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc..
- Danielson Charlotte(1997). *A collection of Performance Tasks and Rubrics*: Middle School Mathematics. Larchmont, NY: Eye O Education, Inc..
- Driver, R., Asoko, H., Leach, J. Mortimer, E. & Scott, P.(1994). *Constructing scientific knowledge in the classroom*. Educational Researcher, 23, (7), 5-12.
- Greeno, J. G.(1978). *Nature of Problem Solving Abilities*, In W. K. Estes(Ed.). *Handbook of learning and cognitive process*: *Human Information Processing*(pp.239~270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krulick, S. & Rudnick, J. A.(1984). *A Sourcebook for Teaching Problem Solving*. Boston: Allyn and Bacon.
- National Council of Teachers of Mathematics(1989). *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematics Assessment*, In J. K. Stenmark(Ed.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*, In Frank Swetz and J. S. Hartzler(Eds.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M.(1989). *Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula*, In W. Blum et. al.(Eds.), *Application and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*(pp. 22~31). West Sussex: Ells Horwood Limited.
- Pólya, G.(1957), *How to Solve it*. 2nd ed., New York: Doubleday & Company, Inc..
- Vosniadou, S.(2001). *How children learn. Educational Practices series*. Monograph No. 7. International Bureau of Education(IBE).

차례

각론

Ⅰ. 지수함수와 로그함수	68
Ⅱ. 삼각함수	112
Ⅲ. 미분법	174
Ⅳ. 적분법	224
삼각함수표	274
수학 용어	275

시간이 지남에 따라 변하는 대상들이 있다.

지수함수와 로그함수

| 준 | 비 | 학 | 습 |

수학 Ⅱ 지수법칙과 로그의 성질

1 다음을 계산하여라.

(1) $9^{\frac{3}{2}}\times 27^{-\frac{2}{3}}$ 3

(2) $\sqrt[6]{9}\div\sqrt[3]{81}$ $\frac{1}{3}$

(3) $\log_6 9+\log_6 4$ 2

(4) $\log_2 9\times\log_3\sqrt{2}$ $2\log_2 3\times\frac{1}{2}\log_3 2=1$

수학 Ⅱ 지수와 로그

2 다음 등식을 로그를 사용하여 나타내어라.

(1) $2^4=16$ $\log_2 16=4$

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$ $\log_{\frac{1}{3}} 27=-3$

미적분 Ⅰ 도함수

3 도함수의 정의를 이용하여 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=x+4$ $f'(x)=1$

(2) $f(x)=x^3-2$ $f'(x)=3x^2$

단원의 지도 목표

1. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

① 지수함수와 로그함수의 뜻을 알게 한다.
② 지수함수와 로그함수의 그래프를 그려보고, 그 성질을 이해하게 한다.
③ 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

2. 지수함수와 로그함수의 미분

① 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.
② 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 지수함수와 로그함수의 활용에서는 구체적인 자연 현상이나 사회 현상에서 나타나는 간단한 방정식과 부등식을 다룬다.
② 지수함수와 로그함수의 극한은 지수함수 e^x과 로그함수 $\ln x$의 도함수를 구하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[수학Ⅱ] 거듭제곱과 거듭제곱근 지수의 확장과 지수법칙 로그의 뜻과 성질 상용로그	**1. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프** 지수함수와 그 그래프 로그함수와 그 그래프 지수함수와 로그함수의 활용 **2. 지수함수와 로그함수의 미분** 지수함수와 로그함수의 극한 지수함수와 로그함수의 미분	[미적분Ⅱ] 여러 가지 미분법 도함수의 활용

단원의 차시별 지도 계획

<table>
<tr><th>중단원</th><th>소단원</th><th>차시</th><th>교과서(쪽)</th><th>지도 내용</th><th>용어와 기호</th></tr>
<tr><td colspan="2">단원의 개관</td><td rowspan="3">1~3</td><td>10~11</td><td>• 단원의 개관
• 준비 학습</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">1. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프</td><td>중단원 도입</td><td>12</td><td>• 산성비를 맞으면 건강에 해로울까?</td><td></td></tr>
<tr><td>01 지수함수와 그 그래프</td><td>13~16</td><td>• 지수함수의 뜻
• 지수함수의 그래프
• 지수함수의 성질</td><td>지수함수</td></tr>
<tr><td>02 로그함수와 그 그래프</td><td>4~5</td><td>17~20</td><td>• 로그함수의 뜻
• 로그함수의 그래프
• 로그함수의 성질</td><td>로그함수</td></tr>
<tr><td>03 지수함수와 로그함수의 활용</td><td>6~8</td><td>21~24</td><td>• 지수함수의 활용
• 로그함수의 활용</td><td></td></tr>
<tr><td>수준별 학습</td><td>9</td><td>25~27</td><td>• 중단원 확인 학습 문제</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">2. 지수함수와 로그함수의 미분</td><td>중단원 도입</td><td rowspan="2">10~13</td><td>28</td><td>• 로그함수를 이용하여 사람이 느끼는 감각의 크기를 알 수 있다.</td><td></td></tr>
<tr><td>01 지수함수와 로그함수의 극한</td><td>29~34</td><td>• 지수함수와 로그함수의 극한
• 무리수 e</td><td>자연로그
e, e^x, $\ln x$</td></tr>
<tr><td>02 지수함수와 로그함수의 미분</td><td>14~15</td><td>35~38</td><td>• 지수함수의 도함수
• 로그함수의 도함수</td><td></td></tr>
<tr><td>수준별 학습</td><td>16</td><td>39~41</td><td>• 중단원 확인 학습 문제</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">단원 마무리</td><td>17~18</td><td>42~47</td><td>• 수행 과제
• 대단원 학습 내용 정리
• 대단원 평가 문제
• 수학 플러스</td><td></td></tr>
</table>

단원의 이론적 배경

1. 함수의 발달

함수는 독립변수와 종속변수 사이의 종속 관계를 기술하기 위하여 생겨났다. 역학에서 두 변량 사이의 관계를 연구한 갈릴레이 등에 의하여 개념화된 함수는 17세기에 이르러 물체의 운동을 나타내는 곡선을 연구하는 가운데 도입되었고 곡선과 결합된 함수를 나타내는 방정식이 연구되면서 17세기 말에 대수적인 함수가 등장하였다.

데카르트(Descartes, R. ; 1596~1650)는 함수의 본질은 '따라 변하는 두 변량 사이의 대응 관계'라고 주장하였으므로 데카르트를 함수의 창시자로 보기도 한다.


데카르트

함수(function)란 용어는 1692년 독일의 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)가 처음 사용하였고, 함수 기호 f는 18세기에 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)가 처음 사용하였다.


오일러

해석기하학의 발달과 함께 여러 곡선이 방정식으로 표현되면서 오일러는 '일변수 함수란 그 변수와 몇 개의 상수로 이루어진 해석적인 식'이라고 정의하였다.

18세기 후반에는 하나의 식으로 표현되지 않는 함수가 발견되었고, 푸리에(Fourier, J. B. J. ; 1768~1830), 코시(Cauchy, A. L. ; 1789~1857), 디리클레(Dirichlet, J. P. G. L. ; 1805~1859) 등에 의하여 주어진 구간의 변량 x에 대하여 y의 값이 각각 정해질 때, y는 x의 함수라고 정의하였다.


칸토어

한편, 칸토어(Cantor, G. ; 1845~1918)에 의하여 집합론이 정립된 후, 20세기에는 디리클레의 정의에 의한 '대응'이라는 함수 개념이 보편화되었으며, 바이어슈트라스(Weierstrass, K. T. W. ; 1815~1897), 데데킨트(Dedekind, J. W. R. ; 1831~1916) 등의 연구로 오늘날의 함수 이론이 완성되었다.

오늘날 우리는 두 집합 A와 B에 대하여 함수 $f: A \rightarrow B$를 'A의 각 원소에 B의 한 원소가 대응되는 관계'로 정의하고, 함수 f의 그래프는 순서쌍의 집합 $G(f)=\{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in f(a)\}$로 정의되므로 곱집합 $A \times B$의 부분집합이다.

2. 지수함수와 로그함수

$a>0$이고 $a \neq 1$인 실수 a와 임의의 실수 x에 대하여 실수 지수 a^x의 값은 단 하나 존재하고, x의 값이 연속적으로 변하면 a^x의 값도 연속적으로 변하게 된다. 따라서 x의 값이 변함에 따라 a^x의 값도 변하므로 $y=a^x$은 함수가 되며, 이 함수를 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

실제로 $y=a^x$의 순서쌍을 좌표평면에 나타내고 매끄러운 곡선으로 연결하면 지수함수의 그래프가 되며,
$a>1$이면 증가하는 그래프이고
$0<a<1$이면 감소하는 그래프가 되므로
지수함수 $y=a^x$은 역함수가 존재하게 된다.

지수함수 $y=a^x$의 역함수는 로그의 정의에 의하여 $y=\log_a x$ ($a>0$이고 $a \neq 1$)이며, 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다. 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수의 역함수로 정의하였으므로 로그함수의 그래프는 지수함수의 그래프를 이용하여 그린다.

3. 자연로그와 무리수 e

지수가 유리수일 때, 지수법칙이 성립한다는 가정하에 자연로그함수 $y=\ln x$, 무리수 e를 다음과 같은 순서로 정의할 수 있다.

(1) 자연로그함수 $y=\ln x$의 도입

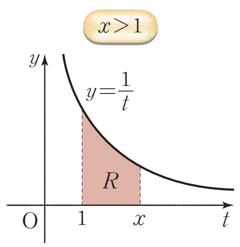
양의 실수 x에 대하여 $\ln x$를

$$\ln x=\int_1^x \frac{1}{t}dt$$

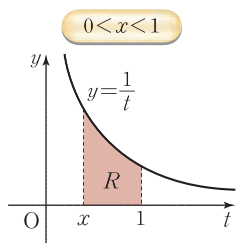
와 같이 정의하면 다음 성질이 성립한다.

❶ $\ln 1=0$

❷ $x>1$일 때 $\ln x>0$이고, $0<x<1$일 때 $\ln x<0$



$\ln x=R$



$\ln x=-R$

❸ $\ln x$는 연속함수이고, 증가함수이다.

❹ 임의의 양의 실수 a, b에 대하여

$$\ln ab=\ln a+\ln b,$$

$$\ln \frac{a}{b}=\ln a-\ln b,$$

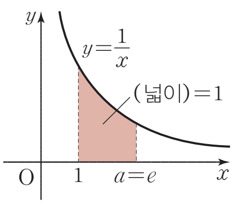
$$\ln a^r=r\ln a \text{ (단, } r\text{는 유리수)}$$

(2) 무리수 e의 정의

무리수 e는 π와 같이 수학에서 매우 중요한 무리수 중의 하나이며 오일러에 의하여 현대적 논의 방법이 소개되었다.

무리수 e의 정의는 $\ln e=1$인 유일한 양의 실수를 나타낸다.

즉, 곡선 $y=\frac{1}{x}$과 x축, $x=1$, $x=a$로 둘러싸인 영역의 넓이가 1이 되는 수 $a(>1)$를 무리수 e라고 정의한다.



$$\ln e=\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$$

무리수 e를 정의하는 또 다른 방법은 다음과 같다.

- $e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$
- $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원		Ⅰ. 지수함수와 로그함수	쪽수	교과서 10~14쪽
소단원		1. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 01 지수함수와 그 그래프	차시	1/18
학습 목표		지수함수의 뜻을 안다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 지수함수의 뜻을 안다.		
전개	탐구 활동 개념 학습	◎ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ◎ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 **지수함수** (1) $a>0$이고 $a\neq1$일 때, 실수 x에 a^x의 값을 대응시키면 각각의 x에 대하여 a^x의 값이 단 하나로 정해진다. (2) 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$을 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 지수함수와 그 그래프의 성질을 안다.		

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원		Ⅰ. 지수함수와 로그함수	쪽수	교과서 14~15쪽
소단원		1. 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 01 지수함수와 그 그래프	차시	2/18
학습 목표		지수함수의 성질과 그 그래프에 대하여 알아본다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◯ 이전 차시에서 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◯ 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 지수함수의 모양에 대하여 각자 설명하여 보자. ◯ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 지수함수와 그 그래프의 성질을 안다.		
전개	개념 학습 문제 해결	◯ 학습 내용 설명 **지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질** (1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다. (2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. $0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, x축을 점근선으로 한다. ◯ 예제 01, 02를 설명한다. ◯ 문제 1, 2, 3번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◯ 사고력 기르기를 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◯ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◯ 다음 차시를 예고한다. • 지수함수의 성질을 이용하여 여러 가지 문제를 해결해 본다.		

1 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프


교과서 12 쪽

1 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프

산성비를 맞으면 건강에 해로울까?

비를 맞고 나서는 몸을 따뜻하게 해야 한다. 그렇지 않으면 감기에 걸리기 쉽다. 그런데 요즘에는 비를 맞으면 안 된다는 말을 더 듣는다. 산성비 때문이다.

산성비를 맞았다고 바로 사람의 피부가 심각하게 상한다든가, 금세 우산에 구멍을 내거나 하지는 않는다. 하지만 비가 내리고 대기 오염 물질이 충분히 씻겨 내려가기 전에 산성비에 지속적으로 노출될 경우 사람이 피해를 입을 수 있다.

그런데 우리 주변에는 산성비보다 더 높은 산성을 띠는 것들이 많다.

산성비는 pH 5.6 이하의 비를 말한다. 순수한 물은 산성도가 pH 7로 중성이다.

pH 수치는 용액 속의 수소 이온의 활동도에 의해 결정된다. 그런데 수소 이온의 활동도는 용액 속의 수소 이온 농도와 거의 같은 값을 가지기 때문에 수소 이온 농도는 수소 이온의 활동도의 척도로 사용된다. 다음은 상용로그를 이용하여 여러 가지 물질의 pH를 나타낸 것이다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 24쪽

산성비에 녹아 있는 수소 이온의 최소 활동도를 알 수 있을까?

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 지수함수와 로그함수의 뜻을 알게 한다.

② 지수함수와 로그함수의 그래프를 그려 보고 그 성질을 이해하게 한다.

③ 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 지수함수와 그 그래프	지수함수의 뜻
	지수함수의 그래프
	지수함수의 성질
02 로그함수와 그 그래프	로그함수의 뜻
	로그함수의 그래프
	로그함수의 성질
03 지수함수와 로그함수의 활용	지수함수의 활용
	로그함수의 활용
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

들어가면서 빗물의 pH 수치가 5.6 이하일 때 산성비라고 하는데, pH 수치는 용액 속의 수소 이온의 활동도에 의해 결정된다. 수소 이온의 활동도는 수소 이온 농도와 거의 같은 값을 가진다.

수소 이온 농도는 용액 1L 속에 존재하는 수소 이온의 몰수를 의미하며, [H+]로 쓴다. 하지만 수소 이온의 실제 몰수는 이처럼 매우 작은 값이므로 표현하기가 불편하다. 따라서 간단하게 표현하기 위해 수소 이온량의 역수에 상용로그를 취한 값을 수소 이온 농도지수 pH로 사용한다. 즉, $\log\left(\frac{1}{[\mathrm{H}+]}\right)=\log\left(\frac{1}{1\times10^{-7}}\right)=7$인 중성의 순수한 물을 기준으로 하여, pH가 7보다 작은 용액은 산성, pH가 7보다 큰 용액은 알칼리성 또는 염기성이라 한다. 이처럼 로그는 어떤 용액의 산성과 염기성의 정도를 나타내는 데에 유용하게 사용된다.

이 단원에서는 지수함수와 로그함수의 성질과 그래프에 대해 지도하며 다양한 문제를 해결할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 지수함수와 로그함수의 뜻을 안다.	상	지수함수와 로그함수에서 정의역, 치역, 함숫값을 구할 수 있다.
	중	지수함수와 로그함수에서 밑의 조건을 말할 수 있다.
	하	주어진 함수 중에서 지수함수, 로그함수를 찾을 수 있다.
2. 지수함수와 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.	상	지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프를 그리고, 그 성질을 말할 수 있다.
	중	두 지수함수 $y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$, 두 로그함수 $y=\log_a x$와 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$의 관계를 말할 수 있다.
	하	지수함수 $y=a^x$과 로그함수 $y=\log_a x$에서 $0<a<1$, $a>1$에 따라 증가함수, 감소함수임을 말할 수 있다.

교과서 13 쪽

01 지수함수와 그 그래프

- 지수함수의 뜻을 안다.
- 지수함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.

지수함수란 무엇인가?

생각 열기 대장균의 증식

유전자 연구에 많이 쓰이는 대장균은 환경이 좋으면 약 20분마다 그 수가 2배로 증가하는데, 이는 1마리의 대장균이 10시간 만에 10억 마리 이상으로 증식할 수 있을 정도의 빠른 속도이다.

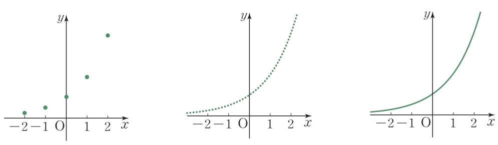
탐구 활동 **어느 실험실에서 대장균을 배양하면 매일 개체수가 2배로 늘어난다고 한다. 처음 1마리의 대장균을 배양할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. x일째의 대장균의 개체수를 y라고 할 때, 다음 표를 완성하여 보자.
(단, 개체수를 처음 측정한 날을 0일째로 한다.)

x(일째)	0	1	2	3	4	5	6
y	1						

2. x와 y 사이의 관계식을 구하여 보자.

❶ 실수 x에 2^x을 대응시키면 그 값은 하나로 정해지므로 $y=2^x$은 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수이다. 이 함수에서 x값에 대응하는 y값의 순서쌍 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 점으로 나타내고, 매끄러운 곡선으로 연결하면 다음과 같다.



위의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, x의 값이 감소하면 y의 값은 양수이면서 0에 한없이 가까워진다. 따라서 함수 $y=2^x$의 치역은 양의 실수 전체의 집합이고, 이 함수의 그래프의 점근선은 x축이다.

곡선이 한없이 가까워지는 직선이 있을 때, 이 직선을 곡선의 점근선이라고 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 구체적인 지수함수의 그래프를 통하여 지수함수의 성질을 이해하게 한다.

2. 지수가 있는 수의 대소를 비교할 때에는 지수함수의 성질을 이용할 수 있게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 지수함수(指數函數, exponential function)

생각 열기 참/고/자/료

생물의 증식 속도는 대장균, 사람 등을 포함한 모든 생물의 개체 또는 세포수가 증가하는 속도를 뜻하며 미생물이나 세포에서는 성장속도와 같은 의미로 사용하고 있다. 일정한 환경에서의 세포의 증식은 지수함수를 이용한 식으로 나타낼 수 있다. 이와 관련된 자세한 내용은 생명과학대사전(2008)에서 알아볼 수 있다.

성취 기준	성취 수준	
3. 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	상	지수함수와 로그함수를 활용하여 실생활에서 나타나는 간단한 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.
	중	지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 밑이 달라서 같게 만들어 주거나 치환을 이용하는 간단한 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.
	하	지수와 로그의 정의를 이용하여 $a^x=b$, $a^x>b$ (단, a, b는 실수) 꼴의 간단한 방정식과 부등식의 문제를 해결할 수 있다.

01 지수함수와 그 그래프

소단원 지도 목표

① 지수함수의 뜻을 알게 한다.
② 지수함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해하게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 실험실에서 경과한 시간(x)에 따른 대장균의 개체수(y)의 증가 패턴을 알아보고, 지수함수의 그래프의 개형을 추측하기 위한 것이다.

1. 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6

2. $y=2^{x-1}$ (단, x는 자연수)

본문 해설

❶ 탐구 활동에서 구한 함수 $y=2^{x-1}$은 x가 x일째를 나타내므로 정의역은 음이 아닌 정수이다. 그러나 일반적으로 함수 $y=2^x$의 정의역은 실수 전체의 집합이고 x값에 대응하는 y값, 즉 치역은 양의 실수 전체의 집합이며 함수의 그래프의 점근선이 x축인 것을 볼 수 있다.

교과서 14 쪽

함수 $y=a^x$에서 $a=1$이면 모든 실수 x에 대하여 $y=1^x=1$이므로 $y=a^x$은 상수함수가 된다. 따라서 지수함수에서는 밑이 1이 아닌 양수인 경우만 생각한다.

❶ 일반적으로 $a>0$이고 $a\neq1$일 때, 실수 x에 a^x의 값을 대응시키면 각각의 x에 대하여 a^x의 값이 단 하나로 정해지므로 $y=a^x$은 x의 함수이다. 이와 같이 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$$

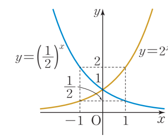
을 a를 밑으로 하는 **지수함수**라고 한다.

예제 01 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그려라.

$y=f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 y축에 대하여 대칭이다.

풀이 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=(2^{-1})^x=2^{-x}$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 1 다음 지수함수의 그래프를 그려라.

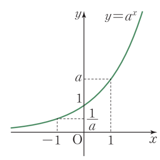
(1) $y=3^x$ (2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

❷ 일반적으로 $a>1$일 때 x의 값이 증가하면 a^x의 값도 증가하고, $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 a^x의 값은 감소하고 양의 실수이면서 0에 한없이 가까워진다.

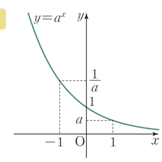
또한 두 함수 $y=a^x$과 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 a값의 범위에 따라 다음과 같다.

$a>1$



$0<a<1$



본문 해설

❶ 실수 x의 값에 a^x의 값을 대응시키는 규칙에서

(i) $a>0$이면 실수 지수의 성질에 의하여 임의의 실수 x에 대하여 a^x은 하나씩 대응한다.

(ii) $a<0$이면 $(-2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{-2}$와 같이 허수가 되는 경우가 생기므로 치역이 실수가 아니다.

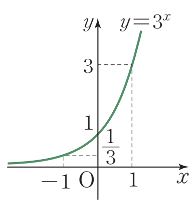
(iii) $a=1$이면 임의의 실수 x에 대하여 $a^x=1$이 되어 상수함수이므로 역함수가 정의되지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 지수함수 $y=a^x$에서 밑 a의 조건을 $a>0$, $a\neq1$로 제한한다.

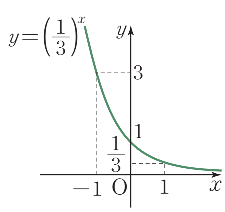
1

목표 | 지수함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이 | (1)



(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x=(3^{-1})^x=3^{-x}$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다. 따라서 오른쪽 그림과 같다.



본문 해설

❷ 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$의 그래프는

(i) $a>1$일 때

x의 값이 증가하면 y의 값도 증가

(ii) $0<a<1$일 때

x의 값이 증가하면 y의 값은 감소

하는 것을 그래프를 통하여 직관적으로 이해하게 한다.

지/도/자/료 지수함수의 정의

$a>0$, $a\neq1$일 때, 함수 $f: R \longrightarrow R^+$, $f(x)=a^x$을 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

지수함수 $f(x)=a^x\ (a>0,\ a\neq1)$에는 다음과 같은 성질이 있다.

(1) $f(x+y)=f(x)f(y)$ (2) $f(x-y)=\dfrac{f(x)}{f(y)}$

(3) $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ (4) $f(nx)=\{f(x)\}^n$

(단, n은 자연수)

예 $f(x)=3^x$이라고 하면

① $f(x+y)=3^{x+y}=3^x\cdot3^y=f(x)f(y)$

② $f(x-y)=3^{x-y}=3^x\cdot3^{-y}=\dfrac{3^x}{3^y}=\dfrac{f(x)}{f(y)}$

③ $f(-x)=3^{-x}=\dfrac{1}{3^x}=\dfrac{1}{f(x)}$

④ $f(nx)=3^{nx}=(3^x)^n=\{f(x)\}^n$

교과서 15 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

지수함수 $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq1$)의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

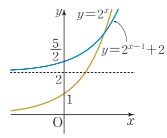
(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, x축을 점근선으로 한다.

예제 02 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프를 그려라.

$y=f(x-a)+b$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 것이다.

풀이 함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=2^{x-1}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 2 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=-3^{x-1}$ (2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-\frac{1}{2}$

발전 **문제 3** 지수함수 $y=2^x$의 그래프를 이용하여 함수 $y=8\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 그려라.

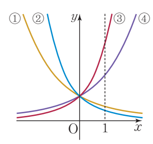
사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

오른쪽 그림은 지수함수

$y=2^x,\quad y=3^x,\quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x,\quad y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

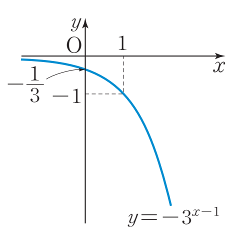
의 그래프를 나타낸 것이다. 이 지수함수의 그래프를 나타내는 것을 각각 찾고, 이를 통해 알 수 있는 지수함수의 그래프의 성질에 대하여 토의하여 보자.



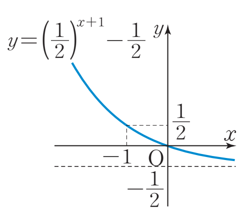
2

목표| 평행이동을 이용하여 지수함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) 함수 $y=-3^{x-1}$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하고 x축에 대칭이동한 것이므로 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



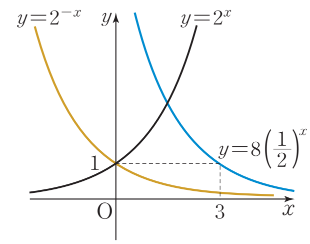
(2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-\frac{1}{2}=2^{-(x+1)}-\frac{1}{2}$이므로 이 함수의 그래프는 함수 $y=2^{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



3

목표| 평행이동과 대칭이동을 이용하여 지수함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| $y=8\left(\frac{1}{2}\right)^x=2^3\cdot2^{-x}=2^{3-x}=2^{-(x-3)}$이므로 이 함수의 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 양의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=8\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 지수함수의 밑과 지수 x의 값에 따른 지수함수의 그래프의 성질을 알게 한다.

풀이| $y=2^x$의 그래프는 ④, $y=3^x$의 그래프는 ③, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프는 ①, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 ②이다.
지수함수 $y=a^x$ $(a>1)$의 그래프는 a의 값이 커질수록 $x>0$일 때 y축에 가까워지고, $x<0$일 때 x축에 가까워진다.
한편 지수함수 $y=a^x$ $(0<a<1)$의 그래프는 a의 값이 작아질수록 $x>0$일 때 x축에 가까워지고, $x<0$일 때 y축에 가까워진다.

지/도/자/료

함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를

(i) x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면
$y=a^x \ \rightarrow\ y-n=a^{x-m}$, 즉 $y=a^{x-m}+n$

(ii) x축에 대하여 대칭이동하면
$y=a^x \ \rightarrow\ -y=a^x$, 즉 $y=-a^x$

(iii) y축에 대하여 대칭이동하면
$y=a^x \ \rightarrow\ y=a^{-x}$, 즉 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$

(iv) 원점에 대하여 대칭이동하면
$y=a^x \ \rightarrow\ -y=a^{-x}$, 즉 $y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$

4

목표| 지수함수의 성질을 이용하여 거듭제곱근이 포함된 두 수의 크기를 비교할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt[5]{3}=3^{\frac{1}{5}}$, $\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{3^2}=3^{\frac{1}{2}}$

함수 $y=3^x$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $\frac{1}{5}<\frac{1}{2}$에서 $3^{\frac{1}{5}}<3^{\frac{1}{2}}$이므로

$\boldsymbol{\sqrt[5]{3}<\sqrt[4]{9}}$

(2) $\sqrt[9]{0.5^{10}}=0.5^{\frac{10}{9}}$, $\sqrt[10]{0.5^9}=0.5^{\frac{9}{10}}$

함수 $y=(0.5)^x$의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값이 감소한다.

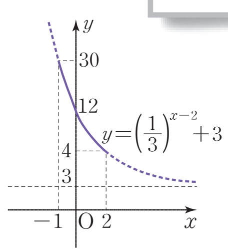
따라서 $\frac{10}{9}>\frac{9}{10}$에서 $0.5^{\frac{10}{9}}<0.5^{\frac{9}{10}}$이므로

$\boldsymbol{\sqrt[9]{0.5^{10}}<\sqrt[10]{0.5^9}}$

5

목표| 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 정의역에서 지수함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+3$의 그래프는 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



따라서 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+3$은

$x=-1$일 때 **최댓값** $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+3=\mathbf{30}$,

$x=2$일 때 **최솟값** $\left(\frac{1}{3}\right)^{0}+3=\mathbf{4}$

를 가진다.

교과서 16 쪽

예제 03 다음 두 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{16}$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(\frac{1}{27}\right)^2$

풀이 (1) $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^4}=2^{\frac{4}{3}}$

함수 $y=2^x$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$에서 $2^{\frac{3}{2}}>2^{\frac{4}{3}}$이므로 $\sqrt{8}>\sqrt[3]{16}$이다.

(2) $\left(\frac{1}{27}\right)^2=\left(\frac{1}{3^3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^6$

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $4<6$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^4>\left(\frac{1}{3}\right)^6$이므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^4>\left(\frac{1}{27}\right)^2$이다.

답 (1) $\sqrt{8}>\sqrt[3]{16}$ (2) $\left(\frac{1}{3}\right)^4>\left(\frac{1}{27}\right)^2$

문제 4 다음 두 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[4]{9}$ (2) $\sqrt[9]{0.5^{10}}$, $\sqrt[10]{0.5^9}$

예제 04 정의역이 $\{x\,|\,-2\le x\le 1\}$인 함수 $y=2^{x+2}-1$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

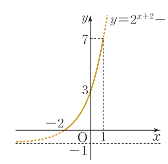
풀이 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=2^{x+2}-1$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 함수 $y=2^{x+2}-1$은

$x=-2$일 때 최솟값 $2^{-2+2}-1=0$,

$x=1$일 때 최댓값 $2^{1+2}-1=7$

을 가진다.



답 최댓값: 7, 최솟값: 0

문제 5 정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$인 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}+3$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

지/도/자/료

함수 $f(x)=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 함수를 $y=g(x)$라고 하면, 이 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$이 점 $\mathrm{A}'(3,\ g(3))$으로 이동된다고 한다. 함수 $y=g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지날 때, m, n의 값을 구하는 과정을 살펴보자.

$f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-m}+n$에서

$\mathrm{A}'(3,\ g(3))$은 $g(x)=2^{x-m}+n$의 그래프 위의 점이므로

$\mathrm{A}'(3,\ 2^{3-m}+n)$ …… ①

$\mathrm{A}(1,\ f(1))$은 $f(x)=2^x$의 그래프 위의 점이므로

$\mathrm{A}(1,\ 2^1)$, 즉 $\mathrm{A}(1,\ 2)$

$\mathrm{A}'(3,\ g(3))$은 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점이므로

$\mathrm{A}'(1+m,\ 2+n)$ …… ②

①, ②의 좌표는 서로 같으므로 $3=1+m$, $m=2$

또, $g(x)=2^{x-2}+n$의 그래프가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$g(0)=2^{-2}+n=1$에서 $n=\frac{3}{4}$

교과서 17 쪽

02 로그함수와 그 그래프

● 로그함수의 뜻을 안다.
● 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해한다.

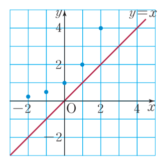
로그함수란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

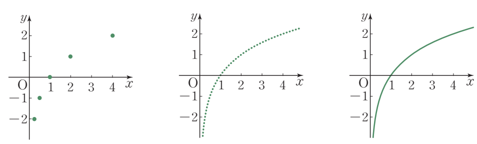
다음은 지수함수 $y=2^x$을 만족시키는 x, y의 값을 나타내는 표이다. 물음에 답하여 보자.

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



1. 순서쌍 (x, y)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 오른쪽 좌표평면 위에 각각 나타내어 보자.
2. 1에서 나타낸 점을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

지수함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점 (a, b)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 (b, a)는 지수함수 $y=2^x$의 역함수의 그래프 위의 점이다. 이 점을 좌표평면 위에 나타내고 매끄러운 곡선으로 연결하면 다음과 같다.



❶ 위의 그래프에서 지수함수 $y=2^x$의 역함수의 그래프는 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합임을 알 수 있다.

02 로그함수와 그 그래프

소단원 지도 목표

① 로그함수의 뜻을 알게 한다.
② 로그함수의 그래프를 그려 보고, 그 성질을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 역함수로 정의됨을 알게 하고, 로그함수의 그래프는 지수함수의 그래프를 이용하여 그릴 수 있도록 지도한다.

2. 구체적인 로그함수의 그래프를 통하여 로그함수의 성질을 이해하게 한다

3. 로그가 있는 수의 대소를 비교할 때에는 로그함수의 성질을 이용할 수 있게 한다.

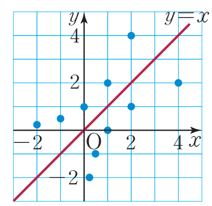
새로 나온 용어와 기호

• 로그함수(logarithmic function)

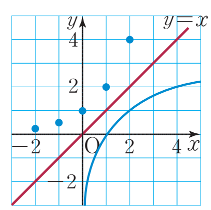
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 지수함수를 만족시키는 x, y 값을 나타낸 표를 이용하여 지수함수의 그래프를 그리고 그 그래프를 직선 $y=x$에 의해 대칭이동시킴으로써 로그함수의 그래프의 개형을 추측하기 위한 것이다.

1.



2.



본문 해설

❶ 탐구 활동에서 지수함수 $y=2^x$의 그래프는 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역은 양의 실수 전체의 집합인 것을 알 수 있다.
따라서 함수 $y=2^x$의 역함수 $y=\log_2 x$의 그래프는 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고 치역은 실수 전체의 집합임을 이해할 수 있다.

지/도/자/료

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=a^x$에서 로그의 정의에 의하여

$x=\log_a y$

이 등식에서 x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$

따라서 지수함수 $y=a^x$의 역함수는 $y=\log_a x$이다.

본문 해설

❶ $a>1$일 때, 지수함수 $y=a^x$은 증가함수이고, 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다. 증가함수의 역함수는 역시 증가함수이므로 $a>1$일 때 로그함수 $y=\log_a x$는 증가함수이다.
따라서 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 마찬가지로 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프도 $a>1$인 경우, $0<a<1$인 경우에 따라 증가, 감소 상태가 다르다.

❷ 역함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 지수함수 $y=a^x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하여 그린다.
(i) $y=a^x$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로 $y=\log_a x$의 그래프는 점 $(1, 0)$을 지난다.
(ii) $y=a^x$의 그래프의 점근선이 x축이므로 $y=\log_a x$의 그래프의 점근선은 y축이다.

교과서 18 쪽

❶ 일반적으로 지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
이제 지수함수의 역함수가 어떤 함수인지 알아보자.
로그의 정의에 의하여

$$y=a^x \iff x=\log_a y \ (a>0, a\neq1)$$

이므로 $x=\log_a y$에서 x와 y를 바꾸면 지수함수 $y=a^x$의 역함수

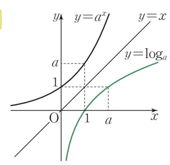
$$y=\log_a x \ (a>0, a\neq1)$$

를 얻는다. 이 함수 $y=\log_a x$를 a를 밑으로 하는 **로그함수**라고 한다.

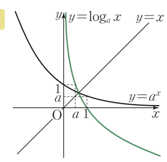
❷ 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$의 그래프는 그 역함수인 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 $y=\log_a x$의 그래프는 $y=a^x$의 그래프를 이용하여 다음과 같이 그릴 수 있다.

$y=a^x$의 그래프는 x축이 점근선이므로 $y=\log_a x$의 그래프는 y축이 점근선이다.

$a>1$



$0<a<1$



이상을 정리하면 다음과 같다.

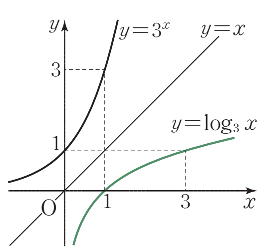
로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$의 성질
(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
(3) 그래프는 점 $(1, 0)$을 지나고, y축을 점근선으로 한다.

문제 1 지수함수 $y=3^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 이용하여 다음 로그함수의 그래프를 그려라.
(1) $y=\log_3 x$　　　(2) $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

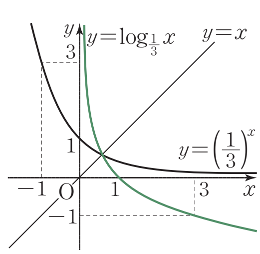
1

목표 | 지수함수의 그래프와 역함수의 성질을 이용하여 로그함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이 | (1) 로그함수 $y=\log_3 x$의 그래프는 그 역함수인 지수함수 $y=3^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대칭임을 이용하여 그린다.



(2) 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 그 역함수인 지수함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=x$에 대칭임을 이용하여 그린다.



지/도/자/료

로그함수 $f(x)=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$에는 다음과 같은 성질이 있다.

(1) $f(xy)=f(x)+f(y)$　　(2) $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

(3) $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$　　(4) $f(x^k)=kf(x)$

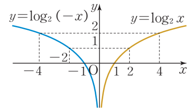
예 $f(x)=\log x$라고 하면
① $f(xy)=\log xy=\log x+\log y=f(x)+f(y)$
② $f\left(\frac{x}{y}\right)=\log\frac{x}{y}=\log x-\log y=f(x)-f(y)$
③ $f\left(\frac{1}{x}\right)=\log\frac{1}{x}=-\log x=-f(x)$
④ $f(x^k)=\log x^k=k\log x=kf(x)$

교과서 19 쪽

예제 01 로그함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 다음 함수의 그래프를 그려라.

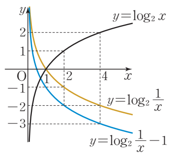
(1) $y=\log_2(-x)$ (2) $y=\log_2\frac{1}{x}-1$

풀이 (1) $y=\log_2(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이다.
따라서 함수 $y=\log_2(-x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



● $y=-f(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

(2) $\log_2\frac{1}{x}=-\log_2 x$이므로 $y=\log_2\frac{1}{x}-1$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 함수 $y=\log_2\frac{1}{x}-1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



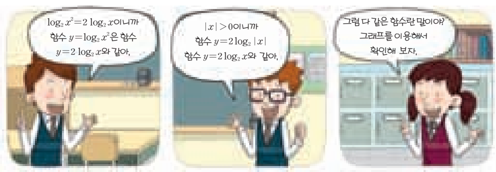
문제 2 다음 함수의 그래프를 그려라.

(1) $y=\log_2 2x$ (2) $y=-\log_{\frac{1}{2}} x$
(3) $y=-\log_3 x+1$ (4) $y=\log_3(x+3)-2$

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

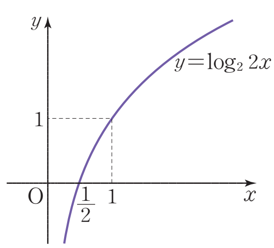
세 함수 $y=\log_2 x^2$, $y=2\log_2 x$, $y=2\log_2|x|$에 대한 대화를 보고, 세 함수가 서로 같은 함수인지 토의하여 보자.



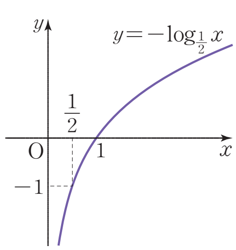
2

목표| 평행이동과 대칭이동을 이용하여 여러 가지 로그함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

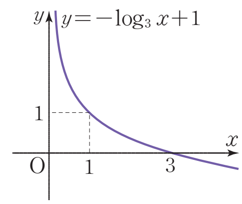
풀이| (1) $\log_2 2x=\log_2 x+1$이므로 $y=\log_2 2x$의 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



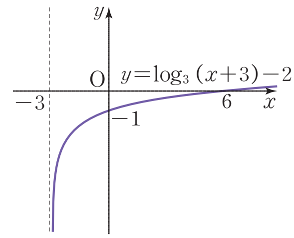
(2) $-\log_{\frac{1}{2}} x=\log_2 x$이므로 함수 $y=-\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(3) $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 다음 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



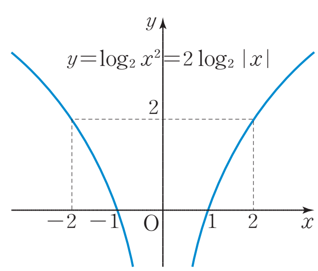
(4) $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
따라서 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

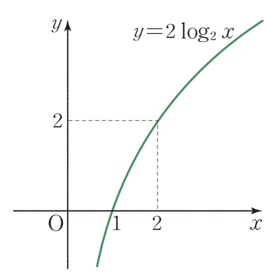


사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 함수가 서로 같은 조건을 이용하여 주어진 세 함수 각각의 정의역과 그래프를 비교함으로써 서로 같은 함수인지 확인할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $y=\log_2 x^2$, $y=2\log_2|x|$의 정의역은 $\{x|x\neq0$인 실수$\}$이고,
$x>0$일 때 $\log_2 x^2=2\log_2 x=2\log_2|x|$
$x<0$일 때 $\log_2 x^2=2\log_2(-x)=2\log_2|x|$
이므로 두 함수 $y=\log_2 x^2$, $y=2\log_2|x|$는 서로 같다.
그러나 함수 $y=2\log_2 x$의 정의역은 $\{x|x>0$인 실수$\}$이므로 앞의 두 함수와 다른 함수이다.





지/도/자/료

일반적으로 $\log_{\frac{1}{a}} x=-\log_a x$이므로 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{a}} x$와 로그함수 $y=\log_a x$의 그래프는 x축에 대하여 대칭이다.

3

목표 | 로그함수의 성질을 이용하여 로그가 포함된 두 수의 크기를 비교할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $3\log_2 5=\log_2 5^3=\log_2 125$,

$2\log_2 7=\log_2 7^2=\log_2 49$

함수 $y=\log_2 x$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $125>49$에서 $\log_2 125>\log_2 49$이므로

$\mathbf{3\log_2 5>2\log_2 7}$

(2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 7=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{7}$,

$\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 64=\log_{\frac{1}{3}} 4^{3\times\frac{1}{3}}=\log_{\frac{1}{3}} 4$

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $\sqrt{7}<4$에서 $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{7}>\log_{\frac{1}{3}} 4$이므로

$\mathbf{\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 7>\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 64}$

교과서 20 쪽

예제 02 다음 두 수의 크기를 비교하여라.

(1) $\log_3 7$, $\frac{1}{2}\log_3 16$　　(2) $2\log_{\frac{1}{2}} 3$, $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27$

풀이 (1) $\frac{1}{2}\log_3 16=\log_3 16^{\frac{1}{2}}=\log_3 4$

함수 $y=\log_3 x$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 $7>4$에서 $\log_3 7>\log_3 4$이므로 $\log_3 7>\frac{1}{2}\log_3 16$이다.

(2) $2\log_{\frac{1}{2}} 3=\log_{\frac{1}{2}} 3^2=\log_{\frac{1}{2}} 9$, $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27=\log_{\frac{1}{2}} 27^{\frac{1}{3}}=\log_{\frac{1}{2}} 3$

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

따라서 $9>3$에서 $\log_{\frac{1}{2}} 9<\log_{\frac{1}{2}} 3$이므로 $2\log_{\frac{1}{2}} 3<\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27$이다.

답 (1) $\log_3 7>\frac{1}{2}\log_3 16$　(2) $2\log_{\frac{1}{2}} 3<\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} 27$

문제 3 다음 두 수의 크기를 비교하여라.

(1) $3\log_2 5$, $2\log_2 7$　　(2) $\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 7$, $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} 64$

예제 03 정의역이 $\{x\,|\,2\le x\le 5\}$인 함수 $y=\log_2(x-1)+2$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

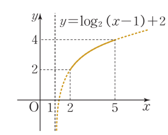
풀이 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\log_2(x-1)+2$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

따라서 함수 $y=\log_2(x-1)+2$는

$x=2$일 때 최솟값 $\log_2 1+2=2$,

$x=5$일 때 최댓값 $\log_2 4+2=4$

를 가진다.



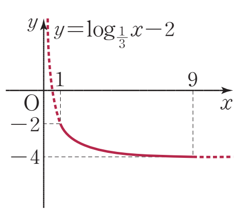
답 최댓값: 4, 최솟값: 2

문제 4 정의역이 $\{x\,|\,1\le x\le 9\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x-2$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

4

목표 | 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 정의역에서 로그함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x-2$의 그래프는 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$에서 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.



따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}} x-2$는

$x=1$일 때 **최댓값**

$\log_{\frac{1}{3}} 1-2=\mathbf{-2}$

$x=9$일 때 **최솟값**

$\log_{\frac{1}{3}} 9-2=\log_{\frac{1}{3}} 3^2-2=-2-2=\mathbf{-4}$

를 가진다.

읽/기/자/료　올림픽의 육상 트랙 종목

올림픽에서 육상 트랙 종목은

100 m, 200 m , 400 m, 800 m,

1500 m, 3000 m, 5000 m, 10000 m

의 종목이 있다.

이렇게 거리를 정한 기준이 무엇일까?

1500 m는 1600 m로, 3000 m는 3200 m로, 5000 m는 6400 m로, 10000 m는 12800 m로 생각하면 육상 트랙 종목은

100×1, 100×2, 100×4, 100×8,

100×16, 100×32, 100×64, 100×128

로 나타낼 수 있다. (단, 단위는 생략한다.)

위의 값들에 각각 밑이 2인 로그를 취한 후 $\log_2 100$을 빼면

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7과 같다.

즉, 육상 트랙 종목은 로그를 사용하여 10000 m를 균등하게 분할한 것으로 생각할 수 있다.

교과서 21 쪽

03 지수함수와 로그함수의 활용

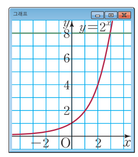
● 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.

지수함수는 어떻게 활용되는가?

생각 열기

탐구 활동

오른쪽 그림은 두 함수 $y=2^x$, $y=8$의 그래프를 컴퓨터를 이용하여 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 함수 $y=2^x$의 그래프와 직선 $y=8$의 교점의 개수를 구하여 보자.
2. $2^x=8$을 만족시키는 x의 값을 구하여 보자.

● 지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$은 정의역이 실수 전체의 집합이고, 치역이 양의 실수 전체의 집합인 일대일 대응이다.

❶ 일반적으로 $a^x=b\,(a>0,\ a\neq1)$꼴의 등식을 만족시키는 x의 값을 구할 때에는 b를 a^k (k는 상수)꼴로 고치고, 다음 성질을 이용한다.

$$a^x=a^k \iff x=k$$

문제 1 어느 펀드 상품에 A원을 투자할 때 t년 후의 이익금은 $A\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$원이 된다고 한다. 처음 투자 금액이 80만 원이고 t년 후의 이익금이 270만 원일 때, t의 값을 구하여라.

일반적으로 $a^x<b$ 꼴의 부등식을 만족시키는 x값의 범위를 구할 때에는 b를 a^k 꼴로 고치고, 다음 성질을 이용한다.

[1] $a>1$일 때, $a^x<a^k \iff x<k$

[2] $0<a<1$일 때, $a^x<a^k \iff x>k$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 지수함수와 상수함수의 그래프를 통해 지수에 미지수가 있는 방정식의 해의 개수와 방정식의 해를 구하는 활동이다.

1. 그림에서 함수 $y=2^x$의 그래프와 $y=8$의 그래프의 교점의 개수는 **1**이다.

2. $2^x=8=2^3$이므로 $\boldsymbol{x=3}$

본문 해설

❶ 지수에 미지수가 포함되어 있는 방정식을 지수방정식이라 하고, 지수방정식을 만족시키는 미지수를 구하는 것을 지수방정식을 푼다고 한다. 2009 개정 교육과정에서 지수방정식이라는 용어는 삭제되었으나 지수함수가 정의역이 실수 전체의 집합이고, 치역이 양의 실수 전체의 집합인 일대일 대응이라는 지수함수의 성질을 이용하여 방정식을 해결할 수 있다.

$a>0,\ a\neq1,\ b>0,\ b\neq1$일 때

① 밑이 같은 경우

$a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

② 지수가 같은 경우

$a^x=b^x \iff a=b$ 또는 $x=0$

03 지수함수와 로그함수의 활용

소단원 지도 목표

① 지수함수를 활용하여 자연 현상이나 사회 현상에서 나타나는 문제를 해결할 수 있게 한다.

② 로그함수를 활용하여 자연 현상이나 사회 현상에서 나타나는 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 각종 자연 현상이나 사회 현상에는 지수함수와 로그함수와 관련된 것이 있음을 알도록 지도한다.

2. 지수함수와 로그함수를 활용하는 문제는 사회 현상이나 자연 현상에서 나타나는 간단한 방정식과 부등식만을 다룬다.

1

목표| 지수함수의 성질을 이용하여 복리에 의해 증가하는 이익금을 계산하는 실생활 문제를 해결할 수 있다.

풀이| 80만 원을 투자하여 t년 후 이익금이 270만 원이므로

$80\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{3}}=270,\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{3}}=\frac{27}{8}=\left(\frac{3}{2}\right)^3$

따라서 $\frac{t}{3}=3$에서 $\boldsymbol{t=9}$

2

목표| 실생활에서 접할 수 있는 여러 가지 상황을 부등식으로 표현하고, 지수함수의 성질을 이용하여 지수에 미지수가 있는 부등식을 해결할 수 있게 한다.

풀이| 방향제의 처음 양을 a라고 하면 t시간 후에 기화되는 양은 $a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{t}$이고 기화되는 양이 $\frac{1}{128}a$보다 작으면 사람이 향기를 느끼지 못하므로 이 방향제의 향기가 지속되는 시간을 부등식으로 나타내면

$a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{t}<a\left(\frac{1}{128}\right)$,

$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{t}<\left(\frac{1}{2^7}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{7}$,

$\frac{t}{3}>7$, $t>21$

따라서 $t>21$일 때 향기를 느끼지 못하므로 향기의 지속 시간은 **21시간**이다.

교과서 22 쪽

예제 01 유리에 어떤 필름을 한 장 붙이면 들어오는 빛의 양의 20 %를 반사시킨다고 한다. 유리를 통과한 빛의 양이 처음 들어오는 양의 $\frac{64}{125}$ 이하가 되도록 하려면 이 필름을 최소한 몇 장 붙여야 하는지 구하여라.

풀이 필름을 한 장 붙이면 들어오는 빛의 양의 80 %가 통과한다.
들어오는 빛의 양을 a라 하고, 필름을 x장 붙일 때 통과하는 빛의 양이 들어오는 양의 $\frac{64}{125}$ 이하라고 하면

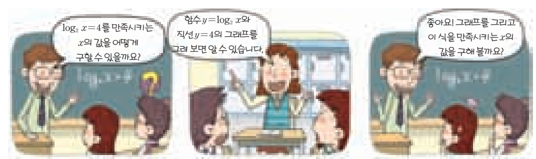
$a\times\left(\frac{80}{100}\right)^{x}\le\frac{64}{125}a$에서 $\left(\frac{4}{5}\right)^{x}\le\left(\frac{4}{5}\right)^{3}$이므로 $x\ge3$

따라서 필름을 최소한 3장 붙여야 한다. **답** 3장

문제 2 어떤 방향제는 개봉한 지 t시간 후에 처음 양의 $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{t}$만큼 기화되어 향기를 낸다. 방향제가 기화되는 양이 처음 양의 $\frac{1}{128}$보다 적으면 기화되어도 더 이상 사람이 향기를 느끼지 못한다고 할 때, 이 방향제의 향기가 지속되는 시간을 구하여라.

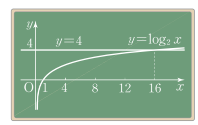
로그함수는 어떻게 활용되는가?

생각 열기



탐구 활동

함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=4$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=4$의 교점의 개수를 구하여 보자.
2. $\log_2 x=4$를 만족시키는 x의 값을 구하여 보자.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 로그함수와 상수함수의 그래프를 통해 지수에 미지수가 있는 방정식의 해의 개수와 방정식의 해를 구하는 활동이다.

1. 그림에서 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 직선 $y=4$의 그래프가 한 점 $(16,\ 4)$에서 만나므로 **1개**이다.

2. $\log_2 x=4$에서
$x=2^4=$ **16**

지/도/자/료

지수에 미지수를 포함한 부등식을 풀 때, 밑의 크기에 따라 지수의 대소를 나타낸 부등호의 방향이 달라진다는 것에 주의한다.
밑이 1보다 크면 지수함수가 증가함수이므로 주어진 부등식과 지수의 대소를 나타낸 부등호의 방향에 변화가 없으나, 밑이 0보다 크고 1보다 작으면 지수함수가 감소함수이므로 주어진 부등식과 지수의 대소를 나타낸 부등호의 방향이 반대로 바뀐다.

기/초/력 향상 문제

1 다음 방정식을 풀어라.

(1) $2^x=64$ (2) $3^x=\frac{1}{27}$ (3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=81$

2 다음 부등식을 풀어라.

(1) $2^x-16>0$ (2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x}<\frac{1}{125}$ (3) $2^{x+1}\le2\sqrt{2}$

답 **1** (1) 6 (2) -3 (3) -4 **2** (1) $x>4$ (2) $x>3$ (3) $x\le\frac{1}{2}$

교과서 23 쪽

❶ 일반적으로 $\log_a x=b$ 꼴의 등식을 만족시키는 x의 값을 구할 때에는 로그의 정의를 이용하거나, b를 $\log_a k$ 꼴로 고치고 다음 성질을 이용한다.

$a>0$, $a\neq1$이고 $x>0$, $k>0$일 때

[1] $\log_a x=b \iff x=a^b$

[2] $\log_a x=\log_a k \iff x=k$

● 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$는 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고, 치역이 실수 전체의 집합인 일대일 대응이다.

예제 02 소리의 강도 $A(\mathrm{dB})$와 소리의 크기 $I(\mathrm{W/m^2})$ 사이에는

$$A=10\log\frac{I}{I_0}$$

인 관계가 있다. 여기서 $I_0=10^{-12}(\mathrm{W/m^2})$으로 사람이 겨우 들을 수 있는 조그마한 소리의 크기를 나타낸다. 사람이 대화를 나누는 소리의 강도가 60 dB일 때, 대화를 나누는 소리의 크기를 구하여라.

풀이 대화를 나누는 소리의 크기를 $x(\mathrm{W/m^2})$로 놓으면

$$60=10\log\frac{x}{10^{-12}}=10(\log x-\log 10^{-12}),\ 6=\log x+12$$

즉, $\log x=-6$이므로 $x=10^{-6}(\mathrm{W/m^2})$

따라서 대화를 나누는 소리의 크기는 $10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$이다.

답 $10^{-6}\ \mathrm{W/m^2}$

문제 3 해저에서 발생한 지진이 지진 해일을 일으킬 때, 높이가 H m인 지진 해일의 규모 M은

$$M=\log_8 H$$

와 같다고 한다. 높이가 x m인 지진 해일의 규모는 높이가 6 m인 지진 해일의 규모의 2배일 때, x의 값을 구하여라.

일반적으로 $\log_a x<b$ 꼴의 부등식을 만족시키는 x값의 범위를 구할 때에는 b를 $\log_a k$ 꼴로 고치고 다음 성질을 이용한다.

$x>0$, $k>0$에 대하여

[1] $a>1$일 때, $\log_a x<\log_a k \iff x<k$

[2] $0<a<1$일 때, $\log_a x<\log_a k \iff x>k$

● 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$는 $a>1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, $0<a<1$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

본문 해설

❶ 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$는 정의역이 양의 실수 전체의 집합이고, 치역이 실수 전체의 집합인 일대일함수이므로 $\log_a x=k$, 즉 $\log_a x=\log_a a^k$의 해는 $x=a^k$뿐이다.

3

목표| 실생활에서 접할 수 있는 여러 가지 상황을 방정식으로 표현하고, 로그함수의 성질을 이용하여 로그의 진수 또는 밑에 미지수가 있는 방정식을 해결할 수 있게 한다.

풀이| 높이가 6 m인 지진 해일의 규모를 M_1이라고 하면 $M_1=\log_8 6$

높이가 x m인 지진 해일의 규모를 M_2라고 하면

$M_2=\log_8 x$

$M_2=2M_1$에서 $\log_8 x=2\log_8 6$, $\boldsymbol{x=36}$

지/도/자/료

지수함수와 로그함수의 활용에서는 구체적인 자연 현상이나 사회 현상에서 나타나는 간단한 방정식과 부등식을 다룬다.

읽/기/자/료 지진 해일(地震海溢)

해저에서의 지진, 해저 화산 폭발, 단층 운동 같은 급격한 지각 변동이나 빙하의 붕괴, 핵실험 등으로 발생하는 것을 천해파, 지진 해파(海波) 또는 쓰나미라고도 한다. 지진 해일이 해안에 도착하면 바닷물이 빠르게 빠져나가면서 다음 해일이 밀려오는 일이 되풀이된다. 규모 6.3 이상의 지진으로 진원 깊이 80 km 이하 얕은 곳의 수직 단층 운동에 의한 지진의 경우 지진 해일이 발생할 가능성이 크다.

현재의 과학 기술로는 지진 발생을 예측하기 어렵지만, 먼 거리에서 발생한 지진 해일에 대해서는 그 도착 시간을 예측할 수 있다. 예를 들어 지진이 일본 북서 근해에서 발생했다면 1시간~1시간 30분 후 우리나라 동해안에 영향을 미치기 시작한다.

기/초/력 향상 문제

다음 방정식을 풀어라.

1 $\log_2 x=-2$

2 $\log_3 (x+2)=2$

3 $\log_x 3=-1$

4 $\log_{\frac{1}{2}} x=3$

답 1 $\frac{1}{4}$ 2 7 3 $\frac{1}{3}$ 4 $\frac{1}{8}$

4

목표| 실생활에서 접할 수 있는 여러 가지 상황을 부등식으로 표현하고, 로그함수의 성질을 이용하여 로그의 진수 또는 밑에 미지수가 있는 부등식을 해결할 수 있게 한다.

풀이| 1년은 4분기로 나누어지므로 분기별 소비자 물가 상승률을 r라고 하면

1년 동안의 소비자 물가 상승률은 $(1+r)^4$

정부의 목표인 올해의 소비자 물가 상승률이 5 % 이하를 달성하려면

$(1+r)^4 \le 1.05$이어야 한다.

양변에 상용로그를 취하면

$4\log(1+r) \le \log 1.05$

$\log 1.05 = 0.0212$이므로

$4\log(1+r) \le 0.0212$,

$\log(1+r) \le \dfrac{0.0212}{4} = 0.0053$

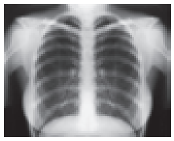
$\log 1.012 = 0.0053$이므로 $1+r \le 1.012$에서

$r \le 0.012$

따라서 분기별 소비자 물가 상승률은 **1.2 % 이하이어야** 한다.

교과서 24 쪽

예제 03 X선 사진에서 사진 농도는 사진에 나타난 상의 검은 정도를 표시하는 양이고, 투과도는 처음 쏘인 빛의 양에 대한 투과된 빛의 양의 비율이다. 사진 농도를 D, 투과도를 T라고 할 때, $D=-\log T$의 식이 성립한다. 사진 농도가 $\frac{1}{2}$ 이상인 부분에 투과된 빛의 양은 처음 쏘인 빛의 양의 최대 몇 배인지 구하여라.



풀이 투과도를 x, 처음 쏘인 빛의 양을 I_0, 투과된 빛의 양을 I라고 하면 $\frac{I}{I_0}=x\ (x>0)$

이때 사진 농도가 $\frac{1}{2}$ 이상이므로 $-\log x \ge \frac{1}{2}$, $\log x \le \log 10^{-\frac{1}{2}}$, $0<x\le 10^{-\frac{1}{2}}$

따라서 투과된 빛의 양은 처음 쏘인 빛의 양의 최대 $10^{-\frac{1}{2}}$배, 즉 $\frac{\sqrt{10}}{10}$배이다.

답 $\frac{\sqrt{10}}{10}$배

문제 4 정부는 올해 소비자 물가 상승률이 5 % 이하가 되도록 관리하려고 한다. 각 분기마다 같은 비율로 상승한다고 할 때, 분기별 소비자 물가 상승률이 몇 % 이하가 되면 정부의 목표가 달성되는지 구하여라. (단, $\log 1.05=0.0212$, $\log 1.012=0.0053$으로 계산한다.)

발전

문제 5 어떤 도시에서 슈퍼 와이파이 망 구축의 적합도를 검증하기 위하여 통신 신호 세기를 측정하였다. 기지국에서 1 km 멀어질 때마다 신호의 세기는 1 km 전의 세기의 90 %가 된다고 하자. 신호의 세기가 $\frac{1}{3}$ 이하가 되는 곳에 중계기를 설치해야 한다고 할 때, 기지국에서 중계기까지의 거리는 최소 몇 km인지 구하여라. (단, $\log 3=0.48$로 계산한다.)

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

어떤 용액에 녹아 있는 수소 이온의 활동도를 a_H라고 할 때, 이 용액의 산성도를 나타내는 pH는

$$\mathrm{pH}=-\log a_H$$

로 정의한다. pH가 5.6 이하인 비를 산성비라고 할 때, 산성비에 녹아 있는 수소 이온의 최소 활동도를 구하여라. (단, 수소 이온의 활동도 a_H는 용액 1 L 속에 녹아 있는 수소 이온 농도 $[H^+]$(mol/L)와 같다고 생각한다.)

5

목표| 실생활에서 접할 수 있는 여러 가지 상황을 부등식으로 표현하고, 로그를 이용하여 지수에 미지수가 있는 부등식을 해결할 수 있게 한다.

풀이| 기지국에서 중계기까지의 거리를 x km, 통신 신호 세기를 a라고 하면 신호의 세기가 $\frac{1}{3}$ 이하가 되는 곳에 중계기를 설치해야 하므로

$a(0.9)^x \le \frac{1}{3}a$, $(0.9)^x \le \frac{1}{3}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 0.9^x \le \log\frac{1}{3}$,

$x\log\left(\frac{9}{10}\right) \le \log\frac{1}{3}$,

$x(2\log 3-1) \le -\log 3$

$x \ge \dfrac{-\log 3}{2\log 3-1} = \dfrac{-0.48}{2\cdot 0.48-1} = 12$

따라서 기지국에서 중계기까지의 거리는 **최소 12 km**이다.

단원 과제

목표| 용액의 산성도가 용액에 녹아 있는 수소 이온의 활동도의 역수의 상용로그값인 것처럼 자연 현상을 수치로 나타낼 때 로그가 활용됨을 알게 한다.

풀이| 산성비의 수소 이온 농도를 x mol/L라고 하면

산성비의 pH는 5.6 이하이므로 $\log\frac{1}{x} \le 5.6$에서

$\log\frac{1}{x} \le \log 10^{5.6}$, $\frac{1}{x} \le 10^{5.6}$, $x \ge 10^{-5.6}$(mol/L)

따라서 산성비의 최소 수소 이온 농도는 $10^{-5.6}$ mol/L이다. 즉, 산성비에 녹아 있는 수소 이온의 최소 활동도는 $\mathbf{10^{-5.6}}$이다.

교과서 25 쪽

중단원 기초

[해답 p.197]

수준별 학습

1 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

01 지수함수와 그 그래프
지수함수의 성질

ㄱ. 제1, 2사분면을 지난다.
ㄴ. x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
ㄷ. 점 $(0,\ 1)$을 지난다.
ㄹ. 점근선은 y축이다.

2 다음 함수의 그래프 중에서 함수 $y=2^x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 것을 모두 찾아라.

01 지수함수와 그 그래프
지수함수의 평행이동

㉠ $y=\frac{2^x}{4}$　　㉡ $y=\sqrt{2}\cdot 2^x$
㉢ $y=2^{3x}$　　㉣ $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

3 함수 $y=\log_{0.1}x$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

02 로그함수와 그 그래프
로그함수의 성질

ㄱ. x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
ㄴ. 점 $(0,\ 1)$을 지난다.
ㄷ. 점근선의 방정식은 $x=0$이다.
ㄹ. 함수 $y=\frac{1}{10^x}$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

4 다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

02 로그함수와 그 그래프
로그함수의 최댓값과 최솟값

(1) 정의역이 $\{x|2\le x\le 26\}$인 함수 $y=\log_3(x+1)$
(2) 정의역이 $\{x|-1\le x\le 6\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$

5 유산균 음료에 들어가는 유산균을 배양하려고 한다. 처음 유산균의 수가 2000마리일 때, t분 후의 유산균의 수 $N(t)$는

03 로그함수와 지수함수의 활용
지수함수의 활용

$$N(t)=2000\cdot 2^{\frac{t}{15}}$$

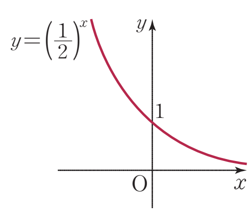
이라고 한다. 유산균의 수가 16000마리가 되는 것은 몇 분 후인지 구하여라.

중/단/원 기초

1

목표| 지수함수의 그래프와 성질에 대해 이해하게 한다.

풀이| ㄴ. 주어진 지수함수의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
ㄹ. 점근선은 x축이다.
오른쪽 그림에서 **ㄱ, ㄷ**은 옳다.



2

목표| 지수법칙과 그래프의 평행이동을 이용하여 서로 평행이동 관계에 있는 지수함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㉠ $y=\frac{2^x}{4}=\frac{1}{4}\cdot 2^x=2^x\cdot 2^{-2}=2^{x-2}$

따라서 $y=2^x$의 그래프를 x축으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

㉡ $y=\sqrt{2}\cdot 2^x=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^x=2^{x+\frac{1}{2}}$

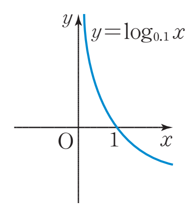
따라서 $y=2^x$의 그래프를 x축으로 $-\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 $y=2^x$의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 **㉠, ㉡**이다.

3

목표| 로그함수의 그래프와 성질에 대해 이해하게 한다.

풀이| ㄱ. 주어진 로그함수의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
ㄴ. 점 $(1,\ 0)$을 지난다.
오른쪽 그림에서 **ㄷ, ㄹ**은 옳다.



4

목표| 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 함수 $y=\log_3(x+1)$의 밑이 1보다 크므로 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.
따라서 함수 $y=\log_3(x+1)$은 $x=26$일 때 **최댓값 3**, $x=2$일 때 **최솟값 1**을 가진다.

(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$에서 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$의 밑이 1보다 작으므로 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다. 따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+3$은 $x=-1$일 때 **최댓값 3**, $x=6$일 때 **최솟값 0**을 가진다.

5

목표| 지수에 미지수가 있는 방정식의 해를 구할 수 있게 한다.

풀이| k분 후 유산균의 수가 16000마리가 된다고 하면

$2000\cdot 2^{\frac{k}{15}}=16000$, $2^{\frac{k}{15}}=8=2^3$, $k=45$

따라서 유산균의 수가 16000마리가 되는 것은 **45분 후**이다.

중/단/원 기본

교과서 26 쪽

중단원 기본

[해답 p.197]

수준별 학습

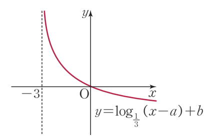
1 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+k$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않도록 하는 정수 k의 최댓값을 구하여라.

01 지수함수와 그 그래프

2 함수 $y=2^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 함수 $y=16\cdot 2^{2x}+4$의 그래프와 겹쳐졌다. 이때 $m+n$의 값을 구하여라.

01 지수함수와 그 그래프
지수함수의 평행이동

3 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $a+b$의 값을 구하여라.



02 로그함수와 그 그래프

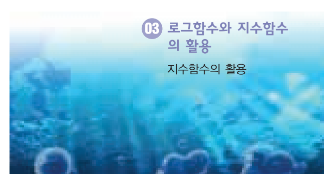
4 두 함수 $y=f(x)$와 $y=\log_2(x+a)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 P(1, 5)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

02 로그함수와 그 그래프
로그함수와 역함수

5 어떤 호수의 수면에서 빛의 세기가 I_0일 때, 수심 d m인 곳에서 빛의 세기 I는

$$I=I_0\times 2^{-\frac{1}{4}d}$$

이라고 한다. 빛의 세기가 수면에서 빛의 세기의 $\frac{1}{4}$이 되는 곳의 수심을 구하여라.

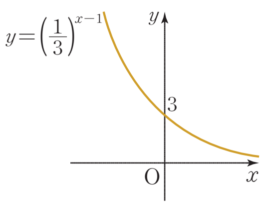


03 로그함수와 지수함수의 활용
지수함수의 활용

1

목표| 평행이동한 지수함수의 그래프를 그려 조건에 맞는 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$의 그래프가 오른쪽과 같으므로 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+k$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 ($y$절편)$\leq 0$이어야 한다.



$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+k\leq 0$에서 $\quad k\leq -3$

따라서 k의 최댓값은 $\mathbf{-3}$이다.

2

목표| 지수법칙과 그래프의 평행이동을 이용하여 두 그래프 사이의 평행이동 관계를 찾을 수 있게 한다.

풀이| $y=16\cdot 2^{2x}+4=2^{2x+4}+4=2^{2(x+2)}+4$

즉 $y=2^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $\quad \boldsymbol{m+n=2}$

3

목표| 평행이동과 로그함수의 성질을 이용하여 그래프를 보고 조건에 맞는 로그함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x-a)+b$의 그래프의 점근선이 -3이므로 $\quad a=-3$

또, 점 (0, 0)을 지나므로 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+3)+b$에서

$0=\log_{\frac{1}{3}}3+b$, $b=1$

따라서 $\quad \boldsymbol{a+b=-2}$

4

목표| 역함수의 성질을 이용하여 로그함수와 지수함수의 관계를 이해하게 한다.

풀이| 함수 $y=f(x)$와 $y=\log_2(x+a)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대칭이므로 함수 $y=f(x)$와 $y=\log_2(x+a)$는 서로 역함수이다.

점 P(1, 5)가 함수 $y=f(x)$ 그래프 위의 점이므로 점 (5, 1)은 $y=\log_2(x+a)$ 그래프 위의 점이다.

따라서 $1=\log_2(5+a)$에서 $\quad 5+a=2$, $\boldsymbol{a=-3}$

5

목표| 자연 현상에서 접할 수 있는 상황을 표현한 지수가 포함된 등식을 이용하여 지수에 미지수가 있는 방정식의 해를 구할 수 있게 한다.

풀이| 빛의 세기가 수면에서 빛의 세기의 $\frac{1}{4}$,

즉 $I=\frac{1}{4}I_0$이므로 $\quad \frac{1}{4}I_0=I_0\times 2^{-\frac{1}{4}d}$, $2^{-2}=2^{-\frac{1}{4}d}$

$-2=-\frac{1}{4}d$에서 $\quad d=8$

따라서 빛의 세기가 수면에서 빛의 세기의 $\frac{1}{4}$이 되는 곳의 수심은 **8 m**이다.

교과서 27 쪽

중단원 실력

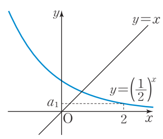
[해답 p.197]

수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같은 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$에 대하여

$a_1=f(2),\ a_{n+1}=f(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3)$

일 때, $a_2,\ a_3,\ a_4$의 대소 관계를 나타내어라.



01 지수함수와 그 그래프
대소 관계

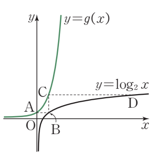
2 정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le 2\}$인 함수 $y=4^x-2^{x+1}+4$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

01 지수함수와 그 그래프
지수함수의 최댓값과 최솟값

3 두 곡선 $y=\log_3 3x,\ y=\log_3 \frac{x}{3}$와 두 직선 $x=1,\ x=9$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

02 로그함수와 그 그래프
로그함수의 평행이동

4 함수 $y=\log_2 x$의 역함수를 $y=g(x)$라고 할 때, 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 두 점 B, D와 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 A, C가 있다. 점 A의 좌표가 (0, 1)일 때, $\frac{\overline{\text{CD}}}{\overline{\text{AB}}}$의 값을 구하여라. (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



02 로그함수와 그 그래프
로그함수와 역함수

5 어느 하천의 수질은 현재 4급수로서 생화학적 산소 요구량(BOD)이 8이라고 한다. 이 지역 주민들의 적극적인 수질 개선으로 BOD가 매년 20 %씩 감소한다고 할 때, 이 하천의 수질이 1급수로서 BOD가 1 이하가 되는 것은 몇 년 후인지 구하여라. (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

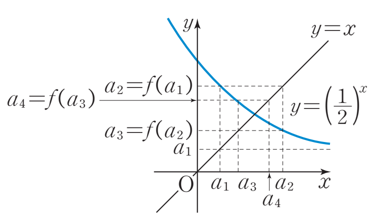
03 로그함수와 지수함수의 활용
로그함수의 활용

중/단/원 실력

1

목표| 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 수열의 각 항들 사이의 대소 관계를 비교할 수 있게 한다.

풀이|



위의 그림에서 $\quad \boldsymbol{a_3<a_4<a_2}$

2

목표| 지수함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=4^x-2^{x+1}+4=2^{2x}-2\cdot 2^x+4\ (-1\le x\le 2)$

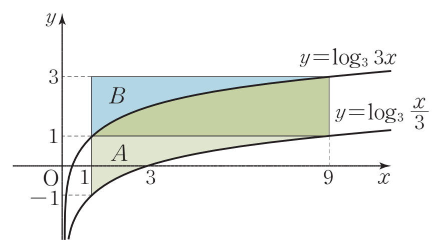
$2^x=t$로 놓으면 $\quad y=t^2-2t+4\ \left(\frac{1}{2}\le t\le 4\right)$

따라서 $y=(t-1)^2+3$에서 $t=1$일 때 **최솟값 3**, $t=4$일 때 **최댓값 12**를 가진다.

3

목표| 두 로그함수의 그래프 사이의 평행이동을 알고 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $y=\log_3 3x$의 그래프는 $y=\log_3 \frac{x}{3}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

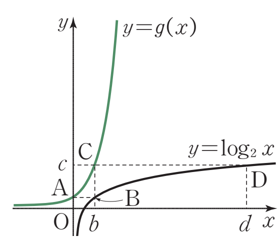


위의 그림에서 A 영역과 B 영역의 넓이가 같으므로 구하는 도형의 넓이는 $\quad 8\times 2=\mathbf{16}$

4

목표| 역함수의 성질을 이용하여 로그함수와 지수함수의 관계를 이해하게 한다.

풀이| 오른쪽 그림에서 점 B, C, D의 좌표를 각각 $\text{B}(b,\ 1)$, $\text{C}(b,\ c)$, $\text{D}(d,\ c)$라고 하면



$\log_2 b=1$에서 $\quad b=2$

$g(2)=2^2=4$에서 $\quad c=4$

$\log_2 d=4$에서 $\quad d=2^4=16$

따라서 $\quad \frac{\overline{\text{CD}}}{\overline{\text{AB}}}=\frac{16-2}{2-0}=\mathbf{7}$

5

목표| 실생활 상황을 부등식으로 표현하고, 로그의 성질을 이용할 수 있게 한다.

풀이| $8\times(0.8)^n\le 1$에서 $\left(\frac{8}{10}\right)^n\le\frac{1}{8}$이므로

$n\log\frac{8}{10}\le\log 2^{-3},\ n(3\log 2-1)\le -3\log 2$

$n\ge\frac{-3\log 2}{3\log 2-1}=\frac{-3\times 0.3}{3\times 0.3-1}=\frac{-0.9}{-0.1}=9$

따라서 이 하천의 수질이 1급수로서 BOD가 1 이하가 되는 것은 **9년 후**이다.

2 지수함수와 로그함수의 미분

중단원을 시작하며

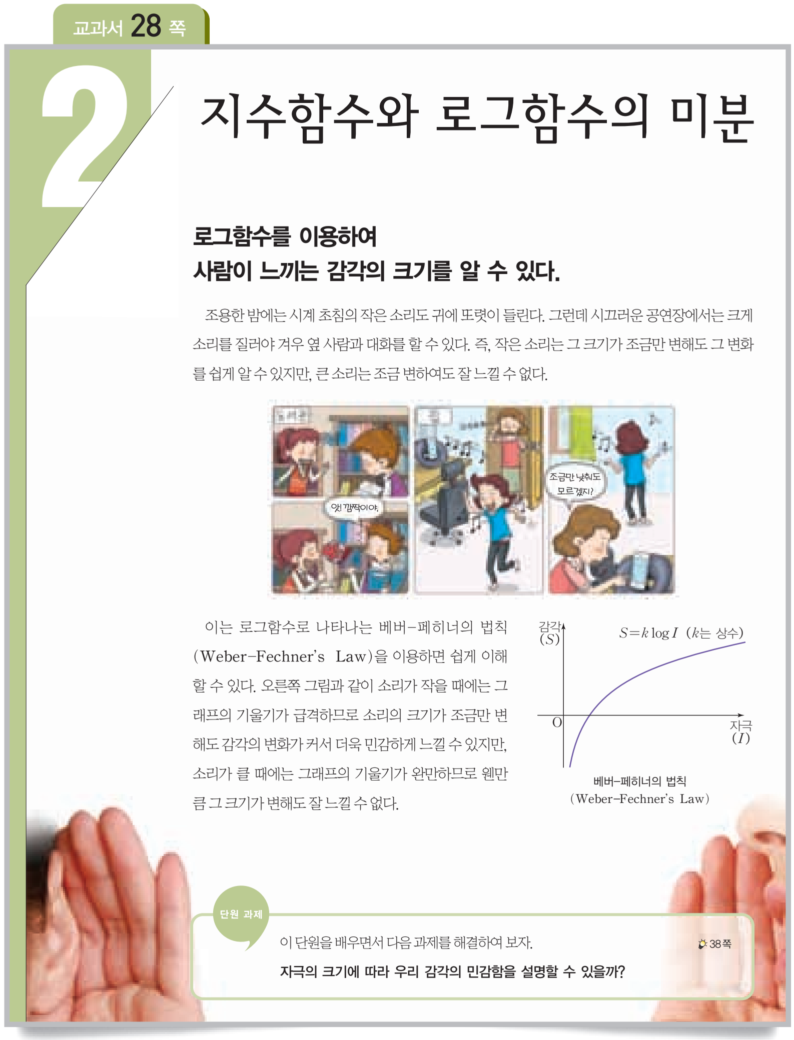
이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

② 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 지수함수와 로그함수의 극한	지수함수와 로그함수의 극한
	무리수 e
02 지수함수와 로그함수의 미분	지수함수의 도함수
	로그함수의 도함수
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제


교과서 28 쪽

2 지수함수와 로그함수의 미분

로그함수를 이용하여
사람이 느끼는 감각의 크기를 알 수 있다.

조용한 밤에는 시계 초침의 작은 소리도 귀에 또렷이 들린다. 그런데 시끄러운 공연장에서는 크게 소리를 질러야 겨우 옆 사람과 대화를 할 수 있다. 즉, 작은 소리는 그 크기가 조금만 변해도 그 변화를 쉽게 알 수 있지만, 큰 소리는 조금 변하여도 잘 느낄 수 없다.

이는 로그함수로 나타나는 베버-페히너의 법칙(Weber-Fechner's Law)을 이용하면 쉽게 이해할 수 있다. 오른쪽 그림과 같이 소리가 작을 때에는 그래프의 기울기가 급격하므로 소리의 크기가 조금만 변해도 감각의 변화가 커서 더욱 민감하게 느낄 수 있지만, 소리가 클 때에는 그래프의 기울기가 완만하므로 웬만큼 그 크기가 변해도 잘 느낄 수 없다.

베버-페히너의 법칙 (Weber-Fechner's Law)

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 38 쪽

자극의 크기에 따라 우리 감각의 민감함을 설명할 수 있을까?

들어가면서 사람의 귀는 시끄러운 곳에서는 조용한 곳보다 소리의 자극이 강하므로 더 크게 말해야 무슨 말을 했는지 알아듣는다. 밤에 형광등을 켜면 실내가 밝아짐을 바로 느낄 수 있지만 빛의 자극이 강한 낮에는 형광등을 켜더라도 형광등 불빛의 밝기를 느끼지 못하는 것도 마찬가지 이치이다. '베버-페히너의 법칙(Weber-Fechner's Law)'은 빛, 음 등의 주어진 자극 강도와 그 강도에 의해 일어나는 감각 강도의 관계를 나타내는 생물학 법칙으로 자극의 세기를 높여가면 감각의 세기는 처음에는 급격하게 변화하지만 점차적으로 완만해진다는 것이다. 이 법칙은 손 위에 놓인 물체의 중량 변화를 알아내는 데 필요한 변화값의 한계에 대한 법칙인 '베버의 법칙'을 확장한 것인데 페히너가 감각량과 자극량 사이에 로그함수의 관계가 있다는 사실을 알아냄으로써 완성된 것이다. 여기서 자극에 대한 감각의 미세한 변화는 미분을 통해 확인할 수 있다.

이 단원에서는 지수함수와 로그함수의 도함수에 대해 지도하며 이를 이용하여 다양한 문제를 해결할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 무리수 e의 뜻을 알고, 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있다.	상	무리수 e의 뜻을 알고, 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있다.
	중	무리수 e의 뜻을 알고, $y=a^x$, $y=\log_a x$의 극한값을 구할 수 있다.
	하	e가 무리수임을 알고, $y=e^x$, $y=\ln x$의 극한값을 구할 수 있다.
2. 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.	상	함수의 합, 차, 곱, 실수배의 미분법을 이용하여 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.
	중	$y=a^x$, $y=\log_a x$를 미분할 수 있다.
	하	$y=e^x$, $y=\ln x$를 미분할 수 있다.

교과서 29 쪽

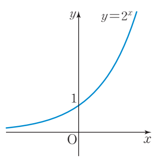
01 지수함수와 로그함수의 극한

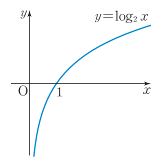
● 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있다.

지수함수와 로그함수의 극한값은 어떻게 구하는가?

생각 열기

탐구 활동 두 함수 $y=2^x$과 $y=\log_2 x$의 그래프를 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.





1. x의 값이 한없이 커질 때와 한없이 작아질 때, 2^x의 값은 어떻게 변하는지 각각 말하여 보자.

2. x의 값이 한없이 커질 때와 양수이면서 0에 한없이 가까워질 때, $\log_2 x$의 값은 어떻게 변하는지 각각 말하여 보자.

탐구 활동에서 x의 값이 한없이 커지면 2^x의 값은 한없이 커지고, x의 값이 한없이 작아지면 2^x의 값은 0에 한없이 가까워진다.

즉, $\lim_{x\to\infty} 2^x=\infty$이고, $\lim_{x\to-\infty} 2^x=0$이다.

또 x의 값이 한없이 커지면 $\log_2 x$의 값은 한없이 커지고, x의 값이 양수이면서 0에 한없이 가까워지면 $\log_2 x$의 값은 음수이면서 절댓값이 한없이 커진다.

즉, $\lim_{x\to\infty} \log_2 x=\infty$이고, $\lim_{x\to0+} \log_2 x=-\infty$이다.

이와 같이 간단한 지수함수와 로그함수의 극한은 그래프를 이용하여 알 수 있다.

새로 나온 용어와 기호

- 자연로그(natural logarithm)
- e, e^x, $\ln x$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 x의 값이 한없이 커지거나 0에 가까워졌을 때 함수의 극한값을 추측하기 위한 것이다.

1. x의 값이 한없이 커질 때 2^x의 값은 양의 실수로 한없이 커지고 x의 값이 한없이 작아질 때 2^x의 값은 0에 가까워지면서 한없이 작아진다.

2. x의 값이 한없이 커질 때 $\log_2 x$의 값은 양의 실수로 한없이 커지나 x의 값이 한없이 0에 가까워지면 $\log_2 x$의 값은 음의 실수로 한없이 작아진다.

01 지수함수와 로그함수의 극한

소단원 지도 목표

① 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.
② 무리수 e와 자연로그의 뜻을 알고 이를 활용하여 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 지수함수의 극한의 개념을 그래프를 이용하여 직관적으로 이해하게 한다.

2. 지수함수의 극한은 지수함수 $y=e^x$의 도함수를 구하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.

3. 로그함수의 그래프로부터 로그함수의 극한을 직관적으로 구할 수 있도록 한다.

4. 로그함수의 극한은 로그함수 $y=\ln x$의 도함수를 구하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.

읽/기/자/료 극한의 개념 정립

극한의 개념이 처음 사용된 것은 기원전 200년경에 그리스 수학자 아르키메데스가 원에 내접, 외접하는 다각형의 변의 수를 두 배씩 증가시켜 정6각형, 정12각형, 정24각형, 정48각형, 정96각형, …을 만들어 원주율 π를 구한 것에서 찾을 수 있다. 극한의 개념은 영국의 수학자이자 물리학자 뉴턴에 의해 처음 도입되었고, 그 후 19세기에 이르러 프랑스의 수학자 코시가 수학적으로 엄밀하게 극한의 개념을 정리하였다.

코시가 말한 극한의 개념은 다음과 같다.

'어떤 변수의 값들이 우리가 원하는 만큼 어떤 수와의 차이가 작아질 때, 그 수를 극한이라고 부른다. 그 예로 무리수 e는 유리수의 극한이 된다.'

본문 해설

1 지수함수 $y=a^x$의 극한

(1) $x \longrightarrow \alpha$ (α는 실수)일 때, 지수함수 $y=a^x$은 연속함수이므로 $\lim\limits_{x \to \alpha} a^x = a^\alpha$이 성립한다.

(2) $0<a<1$인 경우에

$y=a^x$에서 $a=\dfrac{1}{b}$로 놓으면 $b>1$이고

$y=a^x=\left(\dfrac{1}{b}\right)^x=\dfrac{1}{b^x}$이므로 다음이 성립한다.

$x \longrightarrow \infty$일 때, $b^x \longrightarrow \infty$이므로

$\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$

$x \longrightarrow -\infty$일 때, $b^x \longrightarrow 0$이므로

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$

1

목표| 지수함수의 그래프의 성질을 이용하여 지수함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $3>1$이므로

$\lim\limits_{x \to \infty} 3^x = \infty$

(2) $\dfrac{1}{5}<1$이므로

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{5^x} = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^x = \mathbf{0}$$

2

목표| 극한값의 성질을 이용하여 지수함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 분모, 분자를 3^x으로 나누면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{3^x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^x} = \frac{0}{1+0} = \mathbf{0}$$

(2) 분모, 분자를 3^x으로 나누면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{1}{3^{2x}}}{1-\frac{1}{3^{2x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}}$$

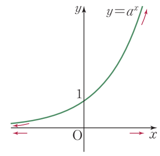
$$= \frac{1+0}{1-0} = \mathbf{1}$$

교과서 30 쪽

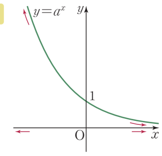
지수함수의 극한에 대하여 알아보자.

지수함수 $y=a^x$ ($a>0$, $a \neq 1$)의 극한은 그래프를 이용하면 쉽게 알 수 있다.

$a>1$



$0<a<1$



1 위의 그래프에서 알 수 있듯이 $x \longrightarrow \infty$ 또는 $x \longrightarrow -\infty$일 때, 지수함수 $y=a^x$의 극한은 다음과 같다.

[1] $a>1$일 때, $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

[2] $0<a<1$일 때, $\lim\limits_{x \to \infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$

문제 1 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} 3^x$　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{5^x}$

예제 01 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x}{1-2^x}$　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}$

풀이 (1) 분자, 분모를 2^x으로 나누면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^x}{1-2^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^x-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

(2) 분자, 분모를 3^x으로 나누면

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3^x-2^x}{3^x+2^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

답 (1) -1 (2) 1

문제 2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2^x}{3^x+1}$　　(2) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$

지/도/자/료

1. 지수함수의 임의의 점에서의 극한값은 그 점에서의 함숫값과 같음을 그래프를 통하여 이해하게 한다.

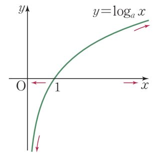
2. 지수함수의 양의 무한대 또는 음의 무한대에서의 극한을 그래프와 점근선을 통하여 이해하게 한다.

3. $\dfrac{\infty}{\infty}$꼴의 지수함수의 극한값을 계산할 때는 분모 부분을 지수 x로 통일한 후, 밑이 가장 큰 것으로 분모, 분자를 나누어 **1**, **2**를 이용하여 극한값을 구한다.

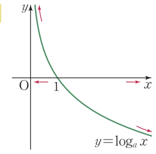
로그함수의 극한에 대하여 알아보자.

로그함수 $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq1$)의 극한은 그래프를 이용하면 쉽게 알 수 있다.

$a>1$



$0<a<1$



❶ 위의 그래프에서 알 수 있듯이 $x \to \infty$ 또는 $x \to 0+$일 때, 로그함수 $y=\log_a x$의 극한은 다음과 같다.

[1] $a>1$일 때, $\lim_{x\to0+}\log_a x=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$

[2] $0<a<1$일 때, $\lim_{x\to0+}\log_a x=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$

문제 3 다음 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\log_2 x$ (2) $\lim_{x\to0+}\log_{\frac{1}{2}} x$

예제 02 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{x}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\{\log_3(x+2)-\log_3 x\}$

풀이 (1) $\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\log_2\left(4+\frac{1}{x}\right)=\log_2 4=2$

(2) 로그의 성질에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\{\log_3(x+2)-\log_3 x\}=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{x+2}{x}=\lim_{x\to\infty}\log_3\left(1+\frac{2}{x}\right)=\log_3 1=0$

답 (1) 2 (2) 0

문제 4 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{1+x}{x}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)+\log_{\frac{1}{2}} 2x\}$

(3) $\lim_{x\to1}\{\log_3|x^3-1|-\log_3|x-1|\}$

3

목표| 로그함수의 그래프를 이용하여 로그함수의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2>1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\log_2 x=\infty$$

(2) $0<\frac{1}{2}<1$이므로

$$\lim_{x\to0+}\log_{\frac{1}{2}} x=\infty$$

4

목표| 로그의 성질과 극한값의 성질을 이용하여 로그함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{1+x}{x}=\lim_{x\to\infty}\log_3\left(\frac{1}{x}+1\right)$

$=\log_3 1=\mathbf{0}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)+\log_{\frac{1}{2}} 2x\}$

$=\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2 2x\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{4x+1}{2x}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\left(2+\frac{1}{2x}\right)$

$=\log_2 2=\mathbf{1}$

(3) $\lim_{x\to1}\{\log_3|x^3-1|-\log_3|x-1|\}$

$=\lim_{x\to1}\log_3\frac{|x^3-1|}{|x-1|}$

$=\lim_{x\to1}\log\frac{|x-1||x^2+x+1|}{|x-1|}$

$=\lim_{x\to1}\log_3|x^2+x+1|=\log_3 3=\mathbf{1}$

본문 해설

❶ (1) $x\to\infty$ 또는 $x\to0+$인 경우

① $a>1$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\log_a x=\infty$, $\lim_{x\to0+}\log_a x=-\infty$

② $0<a<1$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\log_a x=-\infty$, $\lim_{x\to0+}\log_a x=\infty$

③ $f(x)>0$이고 $\lim_{x\to\infty}f(x)$가 양의 실수일 때,

$\lim_{x\to\infty}\log_a f(x)=\log_a\left\{\lim_{x\to\infty}f(x)\right\}$

(2) $x\to a$ (a는 양의 실수)인 경우

$\lim_{x\to a}\log_a x=\log_a a$

지/도/자/료

1. 로그함수의 임의의 점에서의 극한값은 그 점에서의 함숫값과 같음을 그래프를 통하여 이해하게 한다.

2. 로그함수의 0에서의 우극한과 양의 무한대에서의 극한을 그래프와 점근선을 통하여 이해하게 한다.

3. 여러 가지 로그함수의 극한값을 계산할 때는 로그의 성질을 이용하고 **1**, **2**를 이용하여 극한값을 구한다.

생각 열기 참/고/자/료

베르누이

베르누이(Bernoulli, J. ; 1654~1705)는 스위스 바젤에서 태어났다. 처음에는 성직자가 되려고 하였으나, 수학을 독학하다가 여러 나라의 여행을 계기로 수학에 전념하게 되었다. 1682년부터 바젤대학에서 물리학을 강의하였고, 이어 1686년 수학 교수가 되었는데 1684년 발표된 라이프니츠의 논문을 보고 흥미를 느껴 동생 요한과 함께 연구하기 시작했으며, 해석학을 전개하여 등하강곡선(等下降曲線)을 발견하였다(1690).

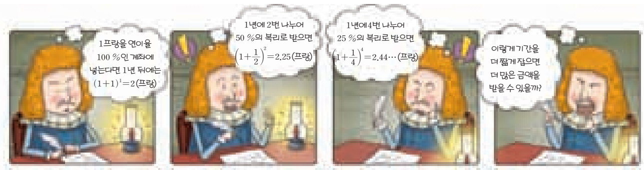
라이프니츠는 베르누이 형제가 자기와 함께 미적분학의 건설자라고 말하고 있다. 베르누이는 나중에 동생과 사이가 나빠져, 요한이 제출한 최속강하선(最速降下線)의 문제를 푸는 동시에 등주(等周) 문제를 제출하는 등 논쟁을 벌이기도 하였다.

조합론을 대성했으며, 확률론에 처음으로 체계를 주고, 또한 '대수(大數)의 법칙'을 세워 통계학에 있어서의 집단적 법칙성의 확률론적 연구를 개척하였다.

교과서 32 쪽

무리수 e는 무엇인가?

생각 열기 베르누이(Bernoulli, J. ; 1654~1705)는 복리 문제를 연구하던 중 다음과 같은 의문을 가졌다.



탐구 활동 원금이 A원이고, $\frac{1}{n}$년마다 이자율이 $\frac{1}{n}$인 복리로 계산하는 예금에 들었을 때, 1년 후의 원리합계 S는 다음과 같다.

$$S=A\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

물음에 답하여 보자.

1. 오른쪽 표를 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 추측하여 보자.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
10	2.59374⋯
100	2.70481⋯
1000	2.71692⋯
10000	2.71814⋯
100000	2.71826⋯
1000000	2.71828⋯

탐구 활동에서 자연수 n의 값이 한없이 커지면 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값은 일정한 수에 가까워짐을 추측할 수 있다.

실제로 n의 값이 한없이 커지면 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값은 일정한 수에 수렴한다고 알려져 있다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값은 존재하며 그 극한값을 문자

$$e$$

로 나타낸다.

이때 수 e는 무리수이며 그 값은 다음과 같다.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2.718281828459045\cdots$$

오일러의 수 e
스위스의 수학자 오일러(Euler, L. ; 1707~1783)는 무리수 e를 처음으로 정의하여 사용하였다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • n의 값에 따른 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 구한 표를 이용하여 $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 확인하기 위한 활동이다.

1. n이 충분히 큰 수인 $n=1000000$일 때 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 약 2.71828⋯이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값은 약 **2.71828⋯**이라고 추측할 수 있다.

지/도/자/료 무리수 e

e는 무리수이다. 무리수는 순환하지 않는 무한소수이기 때문에 소수로 나타내면 순환마디를 찾을 수 없다.

그런데 어떤 무리수에 대해서는 무한 연분수의 형태로 나타낼 수 있어서 특별한 규칙을 발견할 수 있다.

e도 특별한 규칙을 갖는 무리수인데 이 또한 e를 처음으로 정의하여 사용한 오일러에 의해 발견되었다.

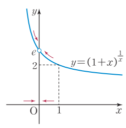
$$e=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\cdots}}}}}$$

본문 해설

❶ 무리수 e의 정의를 이용하여 여러 가지 극한값을 구하는 과정에서 $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$의 지수 $\frac{b}{x}$를 $\frac{1}{ax}$로 고치면 극한값을 쉽게 구할 수 있다.

교과서 33 쪽

$y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$의 그래프



한편 $x=\frac{1}{n}$이라고 하면 $n \to \infty$일 때 $x \to 0$이므로 무리수 e는 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

$$e=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

또 무리수 e를 밑으로 하는 지수함수 e^x도 생각할 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

무리수 e의 정의

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$　　(2) $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

보기 (1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

❶ (2) $\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^2$에서

$2x=t$로 놓으면 $x \to 0$일 때, $t \to 0$이므로 $\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^2=e^2$

문제 5 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-x}$　　(2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}$

(3) $\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}$　　(4) $\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$

❷ 앞에서 정의한 무리수 e를 밑으로 하는 로그 $\log_e x$를 **자연로그**라 하고, 자연로그 $\log_e x$를 간단히

$$\ln x$$

와 같이 나타낸다. 즉, $\log_e x=\ln x$이다.

$y=e^x$과 $y=\ln x$는 서로 역함수 관계이다.

보기 (1) $\ln 1=\log_e 1=0$

(2) $\ln e=\log_e e=1$

문제 6 다음 값을 구하여라.

(1) $\ln e^2$　　(2) $\ln\frac{1}{\sqrt{e}}$

5

목표| 무리수 e의 정의를 이용하여 지수함수가 포함된 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$2x=t$로 놓으면 $x \to \infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

(2) $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-2}$에서

$-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고

$x \to -\infty$일 때 $t \to \infty$이므로

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{-2}=e^{-2}=\boldsymbol{\frac{1}{e^2}}$$

(3) $\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^{\frac{3}{2}}$

$$=e^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{e\sqrt{e}}$$

(4) $\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}$에서

$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고

$x \to 1$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to0}(t+1)^{\frac{1}{t}}=\boldsymbol{e}$$

본문 해설

❷ 밑이 무리수 e인 로그가 자연로그임을 알고, 앞에서 다룬 로그의 성질을 사용하여 자연로그의 값을 구한다.

6

목표| 자연로그의 뜻을 알고, 로그의 성질을 사용하여 자연로그의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\ln e^2=2\ln e=\mathbf{2}$

(2) $\ln\frac{1}{\sqrt{e}}=\ln\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\ln e^{-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$

지/도/자/료　뉴턴과 무리수 e

오일러가 도입한 무리수 e를 뉴턴은 무한급수로 나타내었다.

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

(단, $n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$)

무리수 e의 값은 $e=2.718281828459045\cdots$임이 알려져 있는데 무한급수 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$의 제$n$항을 S_n이라고 하면

$S_2=1+\frac{1}{1!}=2$, $S_3=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}=2.5$,

$S_4=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}=2.66666\cdots$,

$S_5=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=2.7083\cdots$, ……

따라서 n이 커질수록 S_n의 값은 무리수 e에 가까워지는 것을 알 수 있다.

7

목표| $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$임을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e=\mathbf{\dfrac{1}{\ln a}}$

(2) $a^x-1=t$라고 하면 $a^x=t+1$이므로

$x=\log_a(t+1)$

또, $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\dfrac{\log_a(t+1)}{t}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{\log_a(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

$$=\frac{1}{\log_a e}=\mathbf{\ln a}$$

교과서 34 쪽

$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$임을 이용하여 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.

예제 03 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (2) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$

풀이 (1) $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

(2) $e^x-1=t$로 놓으면 $e^x=1+t$이므로 $x=\ln(1+t)$

또 $x\longrightarrow0$일 때 $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\dfrac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

답 (1) 1 (2) 1

문제 7 다음 극한값을 구하여라. (단, $a>0$, $a\neq1$)

(1) $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$ (2) $\lim_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$

문제 8 다음 극한값을 구하여라.

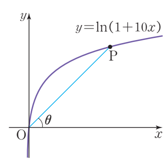
(1) $\lim_{x\to0}\dfrac{2^{2x}-1}{x}$ (2) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{\log_3(1-2x)}$ (4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

오른쪽 그림과 같이 제1사분면에서 곡선 $y=\ln(1+10x)$ 위를 움직이는 점 P와 원점 O를 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때, $\tan\theta$를 점 P의 x좌표에 관한 식으로 나타내고, 그 값을 구하여 보자.



8

목표| $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$임을 이용하여 여러 가지 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **7**의 (2)에서 $\lim_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}=\ln4=\mathbf{2\ln2}$$

(2) 예제 **03**의 (2)에서 $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(3) $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{\log_3(1-2x)}=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{\dfrac{\log_3(1-2x)}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\log_3(1-2x)^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\log_3\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-2}}$$

$$=\frac{1}{\log_3e^{-2}}=-\frac{1}{2\log_3e}=\mathbf{-\frac{1}{2}\ln3}$$

(4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot\dfrac{x}{2}\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}{3\cdot\dfrac{x}{3}\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}}{\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\ln e}{\ln e}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 삼각함수를 로그함수를 이용하여 표현하고 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 좌표가 $(x, \ln(1+10x))$ $(x>0)$이므로

$$\tan\theta=\frac{\ln(1+10x)}{x}$$

점 P가 원점에 한없이 가까워질 때 $x\longrightarrow0+$이므로

$$\lim_{x\to0+}\tan\theta=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+10x)}{x}=\lim_{x\to0+}\ln(1+10x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0+}\ln\{(1+10x)^{\frac{1}{10x}}\}^{10}=\ln e^{10}=\mathbf{10}$$

교과서 35 쪽

02 지수함수와 로그함수의 미분

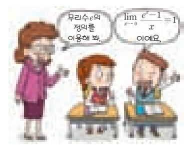
● 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

지수함수의 도함수는 무엇인가?

탐구 활동

지수함수 $f(x)=e^x$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $f(1+\Delta x)-f(1)$을 구하여 보자.
2. 1의 결과를 이용하여 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$을 구하여 보자.



❶ 지수함수의 극한을 이용하여 지수함수의 도함수를 구하여 보자.

지수함수 $y=e^x$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\Delta y=e^{x+\Delta x}-e^x=e^x(e^{\Delta x}-1)$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=e^x \cdot 1=e^x$$

이다. 따라서 $(e^x)'=e^x$이다.

또한 지수함수 $y=a^x\ (a>0,\ a \neq 1)$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x \ln a$$

이다. 따라서 $(a^x)'=a^x \ln a$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

지수함수의 도함수

(1) $y=e^x$이면 $y'=e^x$

(2) $y=a^x\ (a>0,\ a \neq 1)$이면 $y'=a^x \ln a$

보기 (1) $(2e^x)'=2(e^x)'=2e^x$ (2) $(3^x)'=3^x \ln 3$

02 지수함수와 로그함수의 미분

소단원 지도 목표

① 지수함수의 극한을 이용하여 지수함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

② 로그함수의 극한을 이용하여 로그함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 도함수의 정의에 의해 지수함수의 성질과 지수함수의 극한을 이용하여 지수함수의 도함수를 구하도록 한다.
2. 도함수의 정의에 의해 로그함수의 성질과 로그함수의 극한을 이용하여 로그함수의 도함수를 구하도록 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 미분계수의 정의를 이용하여 지수함수 $y=e^x$의 $x=1$에서의 미분계수를 구함으로써 지수함수의 도함수를 구하는 데 있어서 이해를 돕기 위한 활동이다.

1. $f(1+\Delta x)-f(1)=e^{1+\Delta x}-e$

$=e \cdot e^{\Delta x}-e$

$=\boldsymbol{e(e^{\Delta x}-1)}$

2. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$

에서 $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$이므로

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\boldsymbol{e}$

본문 해설

❶ 무리수 e의 정의와 지수함수가 연속함수임을 알고, 지수함수의 극한을 이용하여 지수함수의 도함수를 구하는 과정이다.

지/도/자/료 미분계수와 도함수 (미적분 Ⅰ)

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

함수 $y=f(x)$의 도함수는 함수 $y=f(x)$가 정의역 X에서 미분가능하면 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 함수를 뜻하며

$$f'(x)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

이다.

1

목표| 지수함수의 도함수 공식을 이용하여 지수함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(-3e^x)'$

$=-3(e^x)'=\mathbf{-3e^x}$

(2) $y'=(2\cdot5^x)'$

$=2(5^x)'=\mathbf{2\cdot5^x\cdot\ln 5}$

2

목표| 함수의 합, 차, 곱의 미분법을 이용하여 지수함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=1+2\cdot3^x+3^{2x}$이므로

$y'=(1+2\cdot3^x+3^{2x})'$

$=2\cdot(3^x)'+(9^x)'$

$=\mathbf{2\cdot3^x\ln 3+9^x\ln 9}$

(2) $y=(2e)^x=2^xe^x$에서

$y'=(2^x)'e^x+2^x(e^x)'$

$=2^x\ln 2\cdot e^x+2^x\cdot e^x$

$=\mathbf{(2e)^x(1+\ln 2)}$

교과서 36 쪽

문제 1 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=-3e^x$ (2) $y=2\cdot5^x$

예제 01 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=e^x+3^{2x}$ (2) $y=xe^x$

풀이 (1) $y'=(e^x)'+(9^x)'=e^x+9^x\ln 9$

(2) 곱의 미분법에 의하여

$y'=(x)'\cdot e^x+x\cdot(e^x)'=e^x+xe^x=e^x(1+x)$

답 (1) $y'=e^x+9^x\ln 9$ (2) $y'=e^x(1+x)$

문제 2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=(1+3^x)^2$ (2) $y=(2e)^x$

문제 3 함수 $f(x)=3^x$에 대하여 다음 값을 구하여라.

(1) $f'(0)$ (2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

창의 up 두 상수 a, b에 대하여 지수함수 $f(x)=a^{bx}$의 도함수를 구하는 방법을 설명하여라.

(단, $a>0$, $a\neq1$, $b\neq0$)

3

목표| 지수함수의 도함수 공식을 이용하여 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=3^x$에서 $f'(x)=(3^x)'=3^x\ln 3$

(1) $f'(0)=\mathbf{\ln 3}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이므로

$f'(1)=3^1\ln 3=\mathbf{3\ln 3}$

창의 UP

출제 의도| 지수법칙과 지수함수의 도함수 공식을 이용하여 $f(x)=a^{bx}$의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $a^{bx}=(a^b)^x$이므로

$f'(x)=(a^{bx})'=\{(a^b)^x\}'$

$=(a^b)^x\cdot\ln a^b$

$=\mathbf{b\cdot a^{bx}\ln a}$

지/도/자/료

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=f(x)$일 때 $\{f(x)e^{-x}\}'=0$이 되는지 알아보고 $f(x)$는 어떤 함수인지 학생들에게 말하여 보게 한다.

$y=f(x)e^{-x}$의 도함수는

$y'=f'(x)\cdot e^{-x}-f(x)e^{-x}=f(x)e^{-x}-f(x)e^{-x}=0$

이 된다. 이때 $y'=0$이므로

$y=f(x)e^{-x}=\dfrac{f(x)}{e^x}=C$ (C는 상수)

따라서 $f(x)=Ce^x$ (C는 상수)이다.

교과서 37 쪽

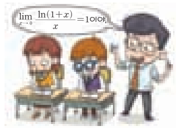
로그함수의 도함수는 무엇인가?

탐구 활동

로그함수 $f(x)=\ln x$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $f(1+\Delta x)-f(1)$을 구하여 보자.

2. **1**의 결과를 이용하여 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$을 구하여 보자.



❶ 로그함수의 극한을 이용하여 로그함수의 도함수를 구하여 보자.
로그함수 $y=\ln x$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln \frac{x+\Delta x}{x}=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

이다. 여기서 $\dfrac{\Delta x}{x}=h$로 놓으면 $\Delta x \to 0$일 때 $h \to 0$이므로

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{xh}=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1}{h}\ln(1+h)\right\}\\&=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\{\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}\}=\frac{1}{x}\ln\{\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\}\\&=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$이다.

❷ 한편 $a>0$, $a\neq 1$일 때, $y=\log_a x$에서 $\log_a x=\dfrac{\log_e x}{\log_e a}=\dfrac{\ln x}{\ln a}$이므로

$$(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{(\ln x)'}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

이다.
이상을 정리하면 다음과 같다.

> **로그함수의 도함수**
>
> (1) $y=\ln x$ $(x>0)$이면 $y'=\dfrac{1}{x}$
>
> (2) $y=\log_a x$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$이면 $y'=\dfrac{1}{x\ln a}$

보기 (1) $x>0$일 때, $(2\ln x)'=2(\ln x)'=\dfrac{2}{x}$ (2) $x>0$일 때, $(\log_3 x)'=\dfrac{1}{x\ln 3}$

본문 해설

❶ $y=\ln x$의 도함수를 구할 때에는 다음과 같은 성질들이 이용된다.

- $\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
- $\ln A-\ln B=\ln \dfrac{A}{B}$
- $\alpha\ln A=\ln A^{\alpha}$
- $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$이므로

$\lim\limits_{h\to 0}\ln(1+h)^{\frac{1}{h}}=\ln e=1$

❷ 로그의 성질
$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq 1$일 때

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}=\frac{\dfrac{\log b}{\log c}}{\dfrac{\log a}{\log c}}=\frac{\log b}{\log a}$$

인 것을 이용한 것이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 로그의 극한과 미분계수의 정의를 이용하여 로그함수 $y=\ln x$의 $x=1$에서의 미분계수를 구함으로써 로그함수의 도함수를 구하는 데 있어서 이해를 돕기 위한 활동이다.

1. $f(1+\Delta x)-f(1)=\ln(1+\Delta x)-\ln 1$
$\qquad=\mathbf{\ln(1+\Delta x)}$

2. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}=e$이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\ln(1+\Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}\\&=\ln e=\mathbf{1}\end{aligned}$$

읽/기/자/료 미분방정식과 미분방정식의 활용 분야

함수 $f(x)$와 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$을 포함하는 방정식을 미분방정식이라고 한다.
기상 현상은 우주의 모든 물질과 마찬가지로 물리학의 기본 법칙을 따른다. 따라서 생활과 밀접한 일기예보에서는 수학, 특히 미분과 적분이 필요하다. 태풍이 불거나 비가 오는 기상 변화와 지진이 일어나고 해류가 흐르는 것 등을 분석하고 예측하기 위해서는 미분방정식을 풀어야 한다.
미분방정식은 국가 경제에도 큰 영향을 미친다. 수학자들은 미분방정식 이론이 금융 시장에도 잘 적용되는 것을 발견했으며 금융 시장의 흐름을 미분방정식을 통해 알 수 있게 되었다. 뉴욕의 금융 시장에서는 수천 명의 수학자들이 새로운 금융 상품을 만들어 내고 있으며, 국민 생활과 밀접한 관련이 있는 국민연금, 퇴직금, 건강보험료 등을 산출해 내고 있다. 또한 경제 활동으로 파생되는 경영 문제와 기업 평가 등도 수학자의 손에서 이루어진다.

교과서 38 쪽

문제 4 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=\ln x^3$ (2) $y=\log_2 2x$

예제 02 다음 함수의 도함수를 구하여라. (단, $x>0$)

(1) $y=\ln x+\log_{\sqrt{2}} x$ (2) $y=x \ln x$

풀이 (1) $y'=(\ln x)'+(\log_{\sqrt{2}} x)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x \ln \sqrt{2}}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x \ln 2}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{\ln 2}\right)$

(2) 곱의 미분법에 의하여

$y'=(x)' \cdot \ln x+x \cdot (\ln x)'=\ln x+x \cdot \left(\frac{1}{x}\right)=\ln x+1$

답 (1) $y'=\frac{1}{x}\left(1+\frac{2}{\ln 2}\right)$ (2) $y'=\ln x+1$

문제 5 다음 함수의 도함수를 구하여라. (단, $x>0$)

(1) $y=2 \ln x-x$ (2) $y=x^2 \log_3 x$

문제 6 곡선 $y=x+\ln x$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

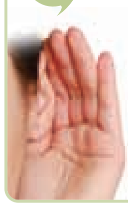
사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

$x>0$일 때, 평균값 정리를 이용하여 다음 부등식이 성립함을 설명하여 보자.

$$\frac{1}{x+1}<\ln (x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$$

단원 과제



앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

외부 자극의 세기를 x, 사람이 느끼는 감각의 세기를 $f(x)$라고 할 때,

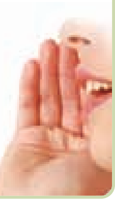
$$f(x)=k \log x \ (k\text{는 상수})$$

가 성립한다고 하자.

로그함수의 도함수를 이용하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $k=\frac{1}{7}$일 때, $f'(1)$과 $f'(10)$의 값을 구하여라.

(2) (1)에서 구한 값을 비교하여 그 의미를 설명하여라.



4

목표| 로그함수의 도함수 공식을 이용하여 로그함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(\ln x^3)'=(3 \ln x)'=\boldsymbol{\frac{3}{x}}$

(2) $y'=(\log_2 2x)'=(1+\log_2 x)'=\boldsymbol{\frac{1}{x \ln 2}}$

5

목표| 함수의 합, 차, 곱의 미분법을 이용하여 로그가 포함된 함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(2 \ln x-x)'=\boldsymbol{\frac{2}{x}-1}$

(2) $y'=(x^2 \log_3 x)'$

$=(x^2)' \log_3 x+x^2(\log_3 x)'$

$=2x \log_3 x+x^2 \times \frac{1}{x \ln 3}$

$=\boldsymbol{2x \log_3 x+\frac{x}{\ln 3}}$

6

목표| 도함수를 이용하여 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기(미분계수)를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y'=(x+\ln x)'=1+\frac{1}{x}$이므로 곡선 $y=x+\ln x$의 $x=1$에서의 접선의 기울기는 $1+\frac{1}{1}=\mathbf{2}$이다.

사고력 기르기 추론

출제 의도| 로그함수의 미분과 평균값 정리를 이용하여 부등식이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\ln x\ (x>0)$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

$x>0$에서 $f(x)$는 연속이고 미분가능하므로

구간 $[x,\ x+1]$에서 평균값 정리를 적용하면

$\frac{\ln (x+1)-\ln x}{(x+1)-x}=f'(c)=\frac{1}{c}$

을 만족하는 c가 구간 $(x,\ x+1)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 $0<x<c<x+1$일 때, $\frac{1}{x}>\frac{1}{c}>\frac{1}{x+1}$이므로

$\frac{1}{x+1}<\ln (x+1)-\ln x<\frac{1}{x}$이 성립한다.

단원 과제

목표| 사람의 느끼는 감각에 대한 베버－페히너의 법칙이 로그함수로 표현됨을 이해하고 로그함수의 미분법을 이용하여 감각의 변화와 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $k=\frac{1}{7}$일 때, $f(x)=\frac{1}{7}\log x$이므로

$f'(x)=\frac{1}{7x \ln 10}$

따라서 $\boldsymbol{f'(1)=\frac{1}{7}\log e}$, $\boldsymbol{f'(10)=\frac{1}{70}\log e}$

(2) $10f'(10)=f'(1)$이므로 자극의 세기가 1일 때 사람이 느끼는 감각의 세기의 변화율이 자극의 세기가 10일 때 사람이 느끼는 감각의 세기의 변화율의 10배와 같다. 따라서 자극의 세기가 작을 때에는 감각의 세기의 변화율이 크므로 더 민감하게 느끼게 된다.

교과서 39 쪽

중단원 기초

[해답 p. 199]

수준별 학습

1 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{2^{2x}}$ (2) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x}{1-3^x}$

(3) $\lim_{x\to\infty}(3^x-2^x)$ (4) $\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-5^{-x}}{5^x+5^{-x}}$

01 지수함수와 로그함수의 극한
지수함수의 극한

2 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to0+}\log_2 2x$ (2) $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{3x+1}{x}$

(3) $\lim_{x\to1+}\{\log_2(x^2-1)-\log_2(x-1)\}$ (4) $\lim_{x\to3+}\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$

01 지수함수와 로그함수의 극한
로그함수의 극한

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}$ (3) $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$

(4) $\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)$ (5) $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1-2x)}{x}$ (6) $\lim_{x\to0}\frac{x}{3^x-1}$

01 지수함수와 로그함수의 극한
무리수 e의 정의

4 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(3e)^x$ (2) $y=(x^2+1)e^x$

(3) $y=3\cdot2^x$ (4) $y=4x\cdot3^x$

02 지수함수와 로그함수의 미분
지수함수의 미분

5 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\ln\frac{1}{x}$ (2) $y=x\ln 3x$

(3) $y=2\log x-x$ (4) $y=\log_2 5x$

02 지수함수와 로그함수의 미분
로그함수의 미분

중/단/원 기초

1

목표| 지수함수의 극한값의 존재를 판단하고, 지수함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **수렴, 0** (2) **수렴, −1**

(3) **발산** (4) **수렴, 1**

2

목표| 로그함수의 극한값의 존재를 판단하고, 로그함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to0+}\log_2 2x=\lim_{x\to0+}(1+\log_2 x)=-\infty$, **발산**

(2) $\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{3x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\log_3\left(3+\frac{1}{x}\right)=\mathbf{1}$, **수렴**

(3) $\lim_{x\to1+}\{\log_2(x^2-1)-\log_2(x-1)\}$

$=\lim_{x\to1+}\log_2\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1+}\log_2(x+1)=\mathbf{1}$, **수렴**

(4) $x-3=t$라고 하면

$\lim_{x\to3+}\log_{\frac{1}{2}}(x-3)=\lim_{t\to0+}\log_{\frac{1}{2}}t=\infty$, **발산**

3

목표| 무리수 e의 정의를 이용하여 지수함수와 로그함수가 포함된 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^2=\boldsymbol{e^2}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{2}\left(\frac{\ln(1+3x)}{3x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\frac{3}{2}\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{3}{2}\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)=\mathbf{\frac{3}{2}}$

(4) $\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right\}^3=\ln e^3=\mathbf{3}$

(5) $\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1-2x)}{x}=\lim_{x\to0}\log_2(1-2x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\log_2\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\}^{-2}$

$=\log_2 e^{-2}=\mathbf{-\frac{2}{\ln 2}}$

(6) $\lim_{x\to0}\frac{x}{3^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{3^x-1}{x}}=\mathbf{\frac{1}{\ln 3}}$

4

목표| 지수함수가 포함된 함수를 미분할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(3^x)'e^x+3^x(e^x)'=\boldsymbol{(3e)^x(\ln 3+1)}$

(2) $y'=(x^2+1)'e^x+(x^2+1)(e^x)'=\boldsymbol{e^x(x+1)^2}$

(3) $y'=(3\cdot2^x)'=3(2^x)'=3(2^x\ln 2)=\boldsymbol{3\cdot2^x\ln 2}$

(4) $y'=(4x)'3^x+4x(3^x)'=\boldsymbol{4\cdot3^x(1+x\ln 3)}$

5

목표| 로그함수가 포함된 함수를 미분할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(-\ln x)'=\boldsymbol{-\frac{1}{x}}$

(2) $y'=(x)'\ln 3x+x(\ln 3x)'=\boldsymbol{\ln 3x+1}$

(3) $y'=2(\log x)'-(x)'=\boldsymbol{\frac{2}{x\ln 10}-1}$

(4) $y'=(\log_2 5+\log_2 x)'=\boldsymbol{\frac{1}{x\ln 2}}$

중/단/원 기본

1

목표| 극한값의 성질과 지수함수의 극한을 이용하여 조건에 맞는 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 분모, 분자를 3^{x-1}으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9a-4\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}}{1+2\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}}=18,\ 9a=18$$

따라서 $\boldsymbol{a=2}$

2

목표| 극한값의 성질을 이용하여 로그함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_3(6^x+9^x)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_3 9^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left[\log_3 9^x+\log_3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right\}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\log_3(9^x)^{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\log_3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1\right\}^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log_3 9+\log_3 1=\log_3 9=\mathbf{2}$$

교과서 40 쪽

중단원 기본

[해답 p.199]

수준별 학습

1 $\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot 3^{x+1}-4}{3^{x-1}+2^x}=18$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.

01 지수함수와 로그함수의 극한
지수함수의 극한

2 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_3(6^x+9^x)$의 값을 구하여라.

01 지수함수와 로그함수의 극한
로그함수의 극한

3 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax+b}-1}{\ln(1+cx)}=3$을 만족시키는 상수 a, b, c에 대하여 $\frac{a+b}{c}$의 값을 구하여라.

01 지수함수와 로그함수의 극한

4 곡선 $y=2x+e^x$에 접하고, 직선 $y=3x-1$에 평행한 직선의 방정식을 구하여라.

02 지수함수와 로그함수의 미분
지수함수의 도함수

5 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)=x\ln x$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$의 값을 구하여라.

02 지수함수와 로그함수의 미분
로그함수의 도함수

3

목표| 무리수 e의 정의와 지수함수, 로그함수의 극한을 이용하여 조건에 맞는 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x\to 0}\ln(1+cx)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}(e^{ax+b}-1)=e^b-1=0$

따라서 $b=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax+b}-1}{\ln(1+cx)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{\ln(1+cx)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}\cdot\frac{cx}{\ln(1+cx)}\cdot\frac{a}{c}$$

$$=1\times\frac{1}{\ln e}\times\frac{a}{c}=\frac{a}{c}=3$$

$b=0$이므로 $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}=\mathbf{3}$

4

목표| 지수함수의 도함수를 이용하여 주어진 조건에 맞는 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 직선은 $y=2x+e^x$에 접하고 기울기가 3이므로 $y'=2+e^x$에서 $2+e^x=3$, $x=0$

접점의 좌표가 $(0,\ 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=3(x-0)$, 즉 $\boldsymbol{y=3x+1}$

5

목표| 도함수의 정의와 로그함수의 도함수를 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2=t$로 놓으면 $x\to 1$일 때, $t\to 1$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\cdot(x+1)$$

$$=2\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}$$

$$=2f'(1)$$

$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$이므로 $f'(1)=1$

따라서 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=2f'(1)=\mathbf{2}$

교과서 41 쪽

중단원 실력

[해답 p.199]

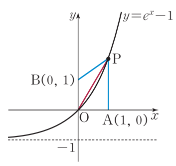
수준별 학습

1 다음 중에서 극한값이 존재하는 것을 모두 찾아라.

01 지수함수와 로그함수의 극한

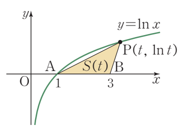
㉠ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1-3^{\frac{1}{x}}}$	㉡ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-5^{\frac{1}{x}}}{1+5^{\frac{1}{x}}}$
㉢ $\lim\limits_{x\to\infty}\log_2\dfrac{2x^2+3x}{x^2-2}$	㉣ $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{2}{1-x}}$

2 곡선 $y=e^x-1$ 위의 임의의 점 P에서 세 점 O$(0,\ 0)$, A$(1,\ 0)$, B$(0,\ 1)$에 선분을 그을 때 만들어지는 두 삼각형 OAP와 OBP의 넓이를 각각 S_A, S_B라고 하자. 점 P가 이 곡선을 따라 점 O에 한없이 가까워질 때, $\dfrac{S_A}{S_B}$의 극한값을 구하여라.



01 지수함수와 로그함수의 극한

3 곡선 $y=\ln x$ 위를 움직이는 점 P$(t,\ \ln t)$와 두 점 A$(1,\ 0)$, B$(3,\ 0)$에 대하여 삼각형 PAB의 넓이를 $S(t)$라고 할 때, $\lim\limits_{t\to1+}\dfrac{S(t)}{t-1}$의 값을 구하여라.



01 지수함수와 로그함수의 극한

4 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이고 $(x-1)f(x)=e^{2x-2}-1$을 만족시킬 때, $f(1)$의 값을 구하여라.

02 지수함수와 로그함수의 미분
지수함수의 미분

5 함수 $f(x)=\begin{cases}ax^2+1 & (x\le1)\\ \ln bx & (x>1)\end{cases}$가 $x=1$에서 미분가능할 때 상수 a, b의 값을 구하여라.

02 지수함수와 로그함수의 미분
로그함수의 미분

중/단/원 실력

1

목표| 지수함수와 로그함수의 극한, 극한의 성질을 이용하여 극한값의 존재 여부를 판단할 수 있게 한다.

풀이| ㉠ ∞ ㉡ 존재하지 않는다. ㉢ 1

㉣ $1-x=t$로 놓으면 $x=1-t$이므로

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{1-x}}=\lim_{t\to0}(1-t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1-t)^{-\frac{1}{t}}\}^{-2}=e^{-2}$$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㉢, ㉣이다.

2

목표| 무리수 e의 정의와 극한의 성질을 이용하여 조건에 맞는 식을 세우고 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 곡선 $y=e^x-1$ 위의 임의의 점 P$(x,\ e^x-1)$에 대하여 $S_A=\dfrac{1}{2}(e^x-1)$, $S_B=\dfrac{1}{2}x$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{S_A}{S_B}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\mathbf{1}$$

3

목표| 로그함수의 극한과 극한의 성질을 이용하여 조건에 맞는 식을 세우고 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot\ln t=\ln t$

$t-1=x$로 놓으면 $t=x+1$이고

$t\to1+$일 때 $x\to0+$이므로

$$\lim_{t\to1+}\frac{\ln t}{t-1}=\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\ln e=\mathbf{1}$$

4

목표| 연속의 정의와 지수함수의 도함수를 이용하여 조건에 맞는 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{e^{2(x-1)}-1}{x-1}$$

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이고

$$\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{t}=\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{2t}\cdot2=\mathbf{2}$$

5

목표| 로그함수의 극한, 미분가능성과 연속의 의미를 이해하고, 조건에 맞는 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 연속이다.

즉, $f(1)=\lim\limits_{x\to1-}(ax^2+1)=\lim\limits_{x\to1+}\ln bx$이므로

$a+1=\ln b$ ①

$(\ln bx)'=(\ln b+\ln x)'=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$에서

$f'(x)=\begin{cases}2ax & (x<1)\\ \dfrac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$이고, $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$f'(1)=2a=1$ ②

①, ②에서 $\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$, $\boldsymbol{b=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}}$

교과서 42 쪽

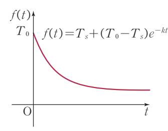
수행 과제

지수함수와 뉴턴의 냉각 법칙

뜨거운 음료나 국의 온도는 시간에 비례하여 일정하게 낮아지지 않고, 처음에는 빠르게 식다가 어느 정도 시간이 지나 주변 온도에 가까워지면 미지근한 상태에서 상대적으로 오랫동안 유지된다. 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)은 물체의 온도 변화가 시간에 대한 지수함수의 형태로 변하게 됨을 알아내었는데, 이를 뉴턴의 냉각 법칙이라고 한다.

뉴턴의 냉각 법칙에 의하면 어떤 물체의 처음 온도를 T_0 ℃, 주위의 온도를 T_S ℃라고 할 때, 식기 시작한 지 t분 지난 후의 온도 $f(t)$ ℃는 다음과 같다.

$f(t)=T_S+(T_0-T_S)e^{-kt}$ (단, k는 상수)



이를 이용하면 뜨거운 음료가 언제쯤 몇 ℃까지 식는지 알 수 있다. 또 법의학에서는 사체의 온도 변화를 측정하여 사망 시각을 추정하는 데 뉴턴의 냉각 법칙을 활용하기도 한다.

실내 온도가 20 ℃인 방 안에서 100 ℃의 뜨거운 음료가 10분 후에 60 ℃가 되었다고 할 때, 뉴턴의 냉각 법칙을 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.

| 과 제 | 1 상수 k의 값을 구하여 보자.

| 과 제 | 2 이 음료의 20분 후의 온도를 구하여 보자.

| 과 제 | 3 극한값 $\lim_{t\to\infty} f(t)$를 구하여 보자.

교과서 43 쪽

대단원 학습 내용 정리

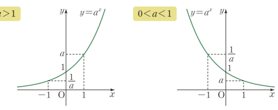
1 지수함수와 그 그래프

지수함수

a가 1이 아닌 양수일 때,
$y=a^x$을 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.
(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
(3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, x축을 점근선으로 한다.



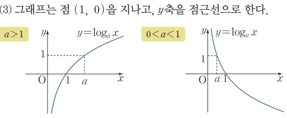
2 로그함수와 그 그래프

로그함수

a가 1이 아닌 양수일 때,
$y=\log_a x$를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
(3) 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, y축을 점근선으로 한다.



3 지수함수와 로그함수의 활용

(1) $a>0$, $a\neq1$일 때
$a^x=a^k \iff x=k$
$\log_a x=\log_a k \iff x=k\ (x>0,\ k>0)$
(2) $a>1$일 때
$a^x<a^k \iff x<k$
$\log_a x<\log_a k \iff x<k\ (x>0,\ k>0)$
$0<a<1$일 때
$a^x<a^k \iff x>k$
$\log_a x<\log_a k \iff x>k\ (x>0,\ k>0)$

4 지수함수와 로그함수의 극한

(1) $a>1$일 때
① $\lim_{x\to\infty} a^x=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=0$
② $\lim_{x\to\infty} \log_a x=\infty$, $\lim_{x\to0+} \log_a x=-\infty$
(2) $0<a<1$일 때
① $\lim_{x\to\infty} a^x=0$, $\lim_{x\to-\infty} a^x=\infty$
② $\lim_{x\to\infty} \log_a x=-\infty$, $\lim_{x\to0+} \log_a x=\infty$

5 무리수 e와 자연로그

(1) $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=2.7182\cdots$
(2) 자연로그: $\ln x=\log_e x$

6 지수함수와 로그함수의 도함수

지수함수의 도함수

(1) $(e^x)'=e^x$
(2) $(a^x)'=a^x\ln a\ (a>0,\ a\neq1)$

로그함수의 도함수

(1) $(\ln x)'=\frac{1}{x}\ (x>0)$
(2) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\ (x>0,\ a>0,\ a\neq1)$

| 용어와 기호 | 지수함수, 로그함수, 자연로그, e, e^x, $\ln x$

수행 과제

● 수행 과제 의도

실생활에서 유용하게 쓰이는 지수함수와 로그함수의 활용 예를 알아보고 문제를 해결해 보기 위한 것이다.

과제 1_풀이

$T_0=100$, $T_S=20$, $t=10$, $f(10)=60$이므로
$f(10)=20+(100-20)e^{-10k}=60$, $80\cdot e^{-10k}=40$,
$-10k=-\ln 2$이므로 $\boldsymbol{k=\frac{\ln 2}{10}}$

과제 2_풀이

1에서 $k=\frac{\ln 2}{10}$이므로 20분 후의 온도는

$$f(20)=20+(100-20)e^{-20\cdot\frac{\ln 2}{10}}$$
$$=20+80e^{-2\ln 2}=20+80\cdot\frac{1}{e^{\ln 4}}$$
$$=20+20=\mathbf{40}$$

과제 3_풀이

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\{20+(100-20)e^{-\frac{\ln 2}{10}t}\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\{20+80(e^{\ln 2})^{-\frac{t}{10}}\}$$
$$=\lim_{t\to\infty}(20+80\cdot 2^{-\frac{t}{10}})$$
$$=20+80\times0=\mathbf{20}$$

대/단/원 평가 문제

1

목표| 지수함수의 그래프의 성질을 이해하게 한다.

교과서 44 쪽

대/단/원 평가 문제

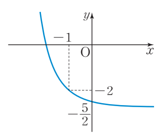
I. 지수함수와 로그함수

선택형

1 지수함수 $y=2^{-x}$에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지난다.
② 점근선은 y축이다.
③ 제4사분면을 지난다.
④ x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
⑤ 그래프는 $y=2^x$의 그래프를 평행이동하면 겹쳐진다.

2 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}+b$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $a+b$의 값은?

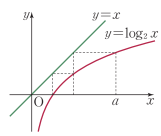


① -2　② -1　③ 1
④ 2　⑤ 3

3 로그함수 $y=-\log_2(x-2)+1$에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x>2\}$이다.
② 치역은 모든 실수이다.
③ 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2$이다.
④ x값이 증가하면 y값은 감소한다.
⑤ 그래프는 $y=\log_2 x$의 그래프를 평행이동하면 겹쳐진다.

4 오른쪽 그림은 로그함수 $y=\log_2 x$와 직선 $y=x$의 그래프를 나타낸 것이다. a의 값은? (단, 점선은 x축 또는 y축에 평행하다.)



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

5 함수 $y=\log_2(x+1)-2$의 역함수가 $y=a^{x+b}+c$일 때, 세 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?

① -3　② -2　③ -1
④ 2　⑤ 3

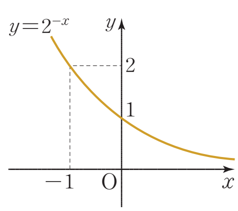
6 처음에 50마리인 박테리아가 x시간 후에는 $50a^x\ (a>0)$마리가 된다고 한다. 4시간 후 이 박테리아가 4050마리가 되었을 때, 박테리아가 36450마리가 되는 것은 몇 시간 후인가?

① 6시간 후　② 7시간 후　③ 8시간 후
④ 9시간 후　⑤ 10시간 후

7 $\lim_{x\to\infty}(4^x-3^x)^{\frac{1}{2x}}$의 값은?

① 0　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ 2　⑤ 3

풀이| 함수 $y=2^{-x}$의 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고 x축을 점근선으로 가지며 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소한다. 또, $y=2^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 겹쳐진다.



답 ④

2

목표| 지수함수의 그래프를 보고 미지수가 있는 지수함수의 식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+a}+b$의 그래프가

점 $(-1,\ -2)$를 지나므로

$-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+a}+b$ …… ㉠

점 $\left(0,\ -\frac{5}{2}\right)$를 지나므로

$-\frac{5}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^a+b$ …… ㉡

㉠$-$㉡에서

$\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1+a}-\left(\frac{1}{2}\right)^a,\ \frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^a(2-1)$

따라서 $a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $b=-3$

따라서 $a+b=1-3=-2$

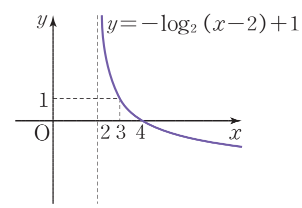
답 ①

3

목표| 로그함수의 그래프의 성질을 이해하게 한다.

풀이| 함수 $y=-\log_2(x-2)+1$의 그래프는 정의역이 $x-2>0$, 즉 $x>2$이고 치역은 모든 실수이다.

오른쪽 그림과 같이 점근선은 $x=2$이고 x값이 증가하면 y값은 감소한다.



답 ⑤

4

목표| 로그함수의 그래프를 이해하고 직선 $y=x$와 로그함수의 그래프를 보고 문제를 풀 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림에서

$y=\log_2 x$가 점 $(1,\ 0)$을 지나고

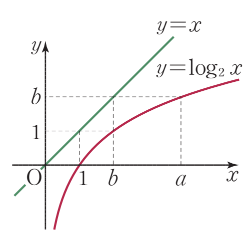
$\log_2 b=1$이라고 하면 $b=2$

따라서

$\log_2 a=b=2$

이므로

$a=2^2=4$



답 ④

5

목표| 로그함수의 역함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $y=\log_2(x+1)-2$의 역함수는

$x=\log_2(y+1)-2,\ \log_2(y+1)=x+2$

$y+1=2^{x+2},\ y=2^{x+2}-1$

이 함수가 $y=a^{x+b}+c$이므로

$a+b+c=2+2-1=3$

답 ⑤

6

목표| 지수함수를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 4시간 후 박테리아가 4050마리가 되었으므로 $50a^4=4050$, $a^4=81=3^4$, $a=3$

n시간 후 박테리아가 36450마리가 되었다고 하면 $50\cdot 3^n=36450$, $3^n=729=3^6$, $n=6$

따라서 6시간 후에 박테리아가 36450마리가 된다.

답 ①

7

목표| 지수함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{x\to\infty}(4^x-3^x)^{\frac{1}{2x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[4^x\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{2x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}(4^x)^{\frac{1}{2x}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}$

$=2\cdot 1=2$

답 ④

8

목표| 로그함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{x\to 2}(\log_2|x^3-8|-\log_2|x^2-4|)$

$=\lim\limits_{x\to 2}\log_2\dfrac{|x^3-8|}{|x^2-4|}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\log_2\dfrac{|(x-2)(x^2+2x+4)|}{|(x-2)(x+2)|}$

$=\log_2\dfrac{12}{4}=\log_2 3$

답 ③

9

목표| 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| ④ $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\log_2(1-x)}{x}\right\}^x$

$=\lim\limits_{x\to 0}\{\log_2(1-x)^{\frac{1}{x}}\}^x$

$=\lim\limits_{x\to 0}\{-\log_2(1-x)^{-\frac{1}{x}}\}^x$

$=(-\log_2 e)^0=1$

답 ④

10

목표| 선분의 길이를 t에 대하여 나타내고 극한값을 구할 수 있게 한다.

교과서 45 쪽

[해답 p.200]

8 $\lim\limits_{x\to 2}(\log_2|x^3-8|-\log_2|x^2-4|)$의 값은?

① $\log_2 3+1$ ② $\log_2 3-1$ ③ $\log_2 3$
④ $2\log_2 3$ ⑤ $\log_2 6$

9 다음 중 극한값이 옳지 않은 것은?

① $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}=e^3$

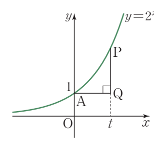
② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

③ $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$

④ $\lim\limits_{x\to 0}\left\{\dfrac{\log_2(1-x)}{x}\right\}^x=\log_2 e$

⑤ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}=\ln 3$

10 곡선 $y=2^x$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t,\ 2^t)$에서 x축에 내린 수선과 점 $\mathrm{A}(0,\ 1)$을 지나고 x축과 평행한 직선이 만나는 점을 Q라고 할 때, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}$의 값은?



① 1 ② $\log_2 e$ ③ $-\log_2 e$
④ $\dfrac{1}{\ln 2}$ ⑤ $\ln 2$

11 함수 $f(x)=e^x$에 대하여 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$의 값은?

① e ② $2e$ ③ $3e$
④ $\dfrac{1}{e}$ ⑤ $\dfrac{1}{e^2}$

12 함수 $f(x)=x^2\ln x$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}$의 값은?

① $-\dfrac{1}{e}$ ② 1 ③ $\dfrac{1}{e}$
④ $\dfrac{2}{e}$ ⑤ e

서답형

13 다음 극한값을 구하여라.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\right\}^n$

14 다음 함수가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

(1) $f(x)=\begin{cases}2^x & (x\ge 1)\\ ax+b & (x<1)\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}\ln x & (0<x\le 1)\\ ax+b & (x>1)\end{cases}$

|서|술|형|

15 $0<a<1$일 때, 정의역이 $\{x\,|\,0\le x\le 3\}$인 함수 $y=a^{x^2-4x+3}$의 최댓값이 8이다. 이때 상수 a의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 한 번 통과하면 60 %의 불순물이 제거되는 정수 필터가 있다. 불순물의 양을 처음 양의 2 % 이하가 되게 하려면 정수 필터를 최소한 몇 번 통과시켜야 하는지 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

풀이| $\overline{\mathrm{AQ}}=t$, $\overline{\mathrm{PQ}}=2^t-1$이므로

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2^t-1}{t}$

이때 $2^t-1=x$로 놓으면 $t\to 0$일 때 $x\to 0$이므로

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2^t-1}{t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\log_2(x+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{1}{x}\log_2(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log_2(x+1)^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\log_2 e}=\ln 2$

답 ⑤

11

목표| 지수함수의 극한을 이용하여 지수함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)-\{f(1-2h)-f(1)\}}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+2\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{(-2h)}$$
$$=f'(1)+2f'(1)=3f'(1)$$
$f(x)=e^x$이고 $f'(x)=e^x$이므로
$3f'(1)=3\cdot e=3e$

답 ③

12

목표| 로그함수의 극한을 이용하여 로그함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=x^2\ln x$에서 $f(1)=0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$
$$f'(x)=(x^2)'\ln x+x^2(\ln x)'$$
$$=2x\ln x+x$$
이므로 $f'(1)=2\ln 1+1=1$

답 ②

13

목표| 무리수 e의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이|

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right\}^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

답 $\sqrt{e}$

14

목표| 지수함수와 로그함수의 미분가능을 이해하고 상수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=1$에서 미분가능하고

$$f'(x)=\begin{cases}2^x\ln 2 & (x>1)\\ a & (x<1)\end{cases}$$ 이므로

$f(1)=\lim_{x\to1-}f(x)$이고 $2=a+b$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=\lim_{x\to1-}f'(x)$이고 $2\ln 2=a$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2\ln 2,\ b=2-2\ln 2$

(2) $x=1$에서 미분가능하고

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (0<x<1)\\ a & (x>1)\end{cases}$$ 이므로

$f(1)=\lim_{x\to1+}f(x)$이고 $0=a+b$ ⋯⋯ ㉠

$f'(1)=\lim_{x\to1+}f'(x)$이고 $1=a$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1,\ b=-1$

답 (1) $a=2\ln 2,\ b=2-2\ln 2$ (2) $a=1,\ b=-1$

15

목표| 지수함수의 최댓값을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-4x+3=t$로 놓으면 $t=(x-2)^2-1$
$0\le x\le3$에서 t는 $x=2$일 때 최솟값 -1, $x=0$일 때 최댓값 3을 가지므로 $-1\le t\le3$
이때 함수 $y=a^t\ (0<a<1)$은 감소함수이므로 t의 값이 최소일 때 최댓값을 가진다.
따라서 $a^{-1}=8$이므로 $a=\frac{1}{8}$

답 $a=\frac{1}{8}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	지수를 완전 제곱 형태로 바꾸기	30%
	$0\le x\le3$에서 지수의 최댓값과 최솟값 구하기	30%
	주어진 함수가 감소함수이므로 지수가 최소일 때 최댓값을 가짐을 알기	30%
답 구하기	a의 값 구하기	10%

16

목표| 실생활 문제를 로그함수를 이용하여 해결할 수 있게 한다.

풀이| 처음 불순물의 양을 a라고 할 때, 정수 필터를 n번 통과시킨 후에 남아 있는 불순물의 양은
$a\times0.4^n$이므로 $a\times0.4^n\le0.02a$ $0.4^n\le0.02$
양변에 상용로그를 취하면 $n(\log4-1)\le\log2-2$
$$n\ge\frac{\log2-2}{2\log2-1}=\frac{0.3-2}{2\times0.3-1}=4.25$$
따라서 정수 필터를 최소한 5번 통과시켜야 한다.

답 5번

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	정수 필터를 n번 통과시킨 후 남아 있는 불순물의 양에 대한 부등식을 나타내기	40%
	부등식을 상용로그를 이용하여 풀기	40%
답 구하기	정수 필터의 최소 통과 횟수 구하기	20%

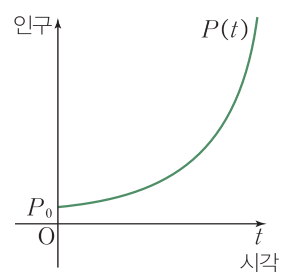
M+ Real Life

수 학 + 실 생 활

맬서스의 인구 성장 모델

영국의 경제학자 맬서스(Malthus, T. R. ; 1766～1834)는 1798년에 발표한 '인구론'에서 식량은 일차함수적으로 증가하여 생산되는 데 반하여 인구는 지수함수적으로 증가한다는 가설을 제시하였다. 따라서 역사 속의 모든 인구 증가가 결국 빈곤으로 이어졌으며 이는 인구의 증가가 식량과 같은 자원의 증가보다 급격하게 이루어지기 때문에 일어나는 현상이라고 주장하였다. 또한 토지의 생산과 인구의 증가 사이에 존재하는 이러한 자연적인 불균형은 인류의 불안정의 원인이 되고 점차 사회 체제를 흔들게 될 것이라고 하였다.

맬서스는 현재의 인구수를 P_0이라고 할 때, 시각 t에서의 인구를 $P(t)$라고 하면 $P(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다고 하였다.

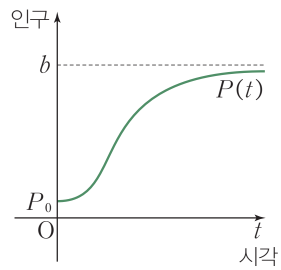


$P(t)=P_0e^{rt}$ (단, r는 인구 증가율)

이러한 인구 모형을 맬서스의 인구 성장 모델 또는 지수 성장 모델이라고 한다.

한편 일반적인 인구 모형에서는 인구가 적은 초창기에는 지수함수적으로 성장을 하지만, 현실적으로 식량, 거주 공간, 다른 천연자원의 영향을 받기 때문에 성장이 제한된다.

이러한 점을 고려하여 벨기에의 수학자 베르휼스트(Verhulst, P. F. ; 1804～1849)는 맬서스의 인구 성장 모델에 대해 다음과 같은 수정 모델을 제시하였다.



현재의 인구수를 P_0이라고 할 때, 시각 t에서의 인구 $P(t)$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$P(t)=\frac{bP_0}{P_0+ae^{-rt}}$$ (단, a, b는 상수, r는 인구 증가율)

이러한 수정 모델을 로지스틱(logistic) 모델이라고 하는데, 이 식으로부터 알 수 있는 것은 인구수가 초기에는 급격하게 증가하지만 어느 순간부터는 완만하게 증가하여 일정하게 유지된다는 것이다.

이러한 특성은 자연 현상이나 사회 현상에서도 나타날 수 있다.

특정한 지역에 신도시가 건설되면 그 지역을 중심으로 인구가 밀집되기 시작한다. 그 인구를 수용하기 위하여 시간이 흐를수록 주변에 상업 지역, 거주 지역이 생기기 시작하여 대도시의 교외가 무계획적이고 무질서하게 발전하는 현상이 나타난다. 그러나 그 팽창은 도시 근교일수록 빠르지만 도시에서의 거리가 증가할수록 무한히 팽창하지 못하고 일정한 수준에서 정지한다.

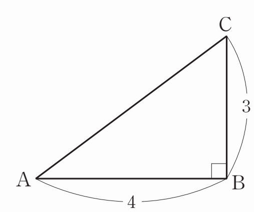
삼각형을 이용한 삼각측량법은 먼 바다를 항해하는
범선의 위치를 파악하는 데 이용되고 있다.

삼각함수

|준|비|학|습|

중③ 삼각비

1 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$일 때, $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$의 값을 각각 구하여라.



$\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos A=\frac{4}{5}$, $\tan A=\frac{3}{4}$

중③ 삼각비

2 다음 표의 빈칸에 알맞은 수를 써넣어라.

A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

미적분Ⅰ 함수의 극한

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$ 3

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{n}$ (단, $0^\circ\le\theta\le 90^\circ$) 0

단원의 지도 목표

1. 삼각함수의 뜻과 그래프

① 일반각과 호도법의 뜻을 알게 한다.
② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.
③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있게 한다.

2. 삼각함수의 미분

① 삼각함수의 덧셈정리를 이해하게 한다.
② 삼각함수의 극한을 구할 수 있게 한다.
③ 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 삼각함수의 성질은 삼각함수의 그래프의 성질을 이해하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.
② 삼각함수의 덧셈정리와 관련하여 복잡한 문제는 다루지 않는다.
③ 삼각함수의 활용에서는 주어진 구간 안에서 해를 구하는 간단한 방정식과 부등식을 다룬다.
④ 삼각함수의 그래프를 그리거나 삼각함수와 관련된 문제를 해결할 때 공학적 도구를 활용할 수 있게 한다.
⑤ 삼각함수의 극한은 삼각함수 $\sin x$, $\cos x$의 도함수를 구하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습

[중1~3학년군]
삼각비

[수학 Ⅱ]
함수

본 단원

1. 삼각함수의 뜻과 그래프
일반각과 호도법
삼각함수
삼각함수의 그래프와 성질
삼각함수의 활용

2. 삼각함수의 미분
삼각함수의 덧셈정리
삼각함수의 극한
사인함수와 코사인함수의 미분

후속 학습

[미적분 Ⅱ]
함수의 몫의 미분법
합성함수의 미분법
역함수의 미분법

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	48~49	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 삼각함수의 뜻과 그래프	중단원 도입		50	• 하루에 두 번씩 갈라지는 바닷길	
	01 일반각과 호도법		51~55	• 일반각 • 호도법	시초선, 동경, 일반각, 라디안, 호도법
	02 삼각함수	4~6	56~60	• 삼각함수 • 삼각함수 사이의 관계	사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 삼각함수, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\csc x$, $\sec x$, $\cot x$
	03 삼각함수의 그래프와 성질	7~13	61~73	• 사인함수의 그래프 • 코사인함수의 그래프 • 탄젠트함수의 그래프 • 삼각함수의 성질	주기함수, 주기
	04 삼각함수의 활용	14~15	74~76	• 삼각함수의 방정식과 부등식에의 활용	
	수준별 학습	16	77~79	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 삼각함수의 미분	중단원 도입	17~20	80	• 소리는 사인함수와 코사인함수의 합으로 나타낼 수 있다.	
	01 삼각함수의 덧셈정리		81~87	• 삼각함수의 덧셈정리 • 삼각함수의 합성	덧셈정리
	02 삼각함수의 극한	21~22	88~92	• 삼각함수의 극한 • $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$의 값	
	03 사인함수와 코사인함수의 미분	23	93~94	• 사인함수와 코사인함수의 도함수	
	수준별 학습	24	95~97	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		25~26	98~105	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 삼각법의 기원

삼각법(trigonometry)의 기원에 대한 역사는 모호하다. 가장 오래된 기록은 ‘린드 파피루스’에 있는 피라미드의 이면각에 대한 코탄젠트(cotangent)값과 관련된 문제이다. 또 고대 바빌로니아의 설형문자판인 ‘프림프톤 322’에는 시컨트(secant)의 표가 들어 있다.

삼각법은 천문학, 점성술, 토지 측량과 같은 실용상의 필요에서 시작하였으며 그 역사는 매우 길다. 이집트, 바빌로니아, 중국 등에서 각의 계량 또는 삼각법에 대한 단편적인 기록을 볼 수 있으나 삼각법을 체계적으로 연구한 최초의 학자는 기원전 150년경 고대 그리스의 히파르코스(Hipparchos ; ?B.C. 190~?B.C. 125)이다.

천문학자였던 히파르코스는 구면 위의 삼각형의 각의 크기와 변의 길이 사이의 관계를 다루는 구면삼각법을 창안하였다. 4세기의 주석가인 알렉산드리아의 수학자 테온(Theon of Alexandria ; 335경~405경)은 히파르코스가 현표를 만드는 내용을 담은 12권의 책을 썼다고 주장한다. 프톨레마이오스(Ptolemaeos ; ?85~?165)가 히파르코스의 논문을 인용하여 만든 것으로 여겨지는 현표를 보면 30′씩마다 주어진 원의 모든 중심각의 현의 길이를 계산해 놓고 있다. 그것은 원의 반경을 60등분한 다음 한 등분을 단위로 하여 각 현의 길이를 60진법으로 표현한 것이다. 따라서 중심각의 크기가 α인 현의 길이를 기호 crd α로 표시하면 다음과 같은 기록을 볼 수 있다.

프톨레마이오스

‘crd 36도는 반경의 $\frac{37}{60}$+반경의 $\frac{4}{60^2}$+반경의 $\frac{55}{60^3}$ 이다.’

따라서 프톨레마이오스의 현표는 본질적으로 0°에서 90°까지의 각에 15′마다의 각의 사인값을 주고 있는 셈이다.

2. 인도와 아라비아의 삼각법

한편 고대 인도인들도 그리스인들처럼 천문학에 대한 도구로 사용하기 위해 삼각법을 발전시켰다. 그들은 우리에게 익숙한 도, 분, 초의 분각법을 사용하였고 사인표를 제작하였다. 인도인들은 천문학에서 평면과 구면삼각형에 대한 문제를 풀었다. 인도인들의 삼각법은 그리스인들의 삼각법과는 달리 기하학적이라기보다는 산술적이었다.

그리스인이 호의 2배의 현을 계산한 것에 비하여 인도인은 그 반분(半分), 곧 호의 정현(正弦, sine) 및 $1-\cos\alpha$를 구하였다.

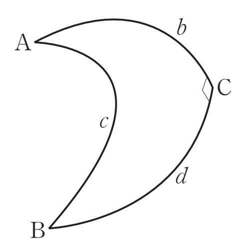
알바타니(Al-Battani ; ?858~929)는 빗각의 구면삼각형에 대한 중요한 공식

$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$

와 ∠C가 직각인 구면삼각형 ABC에서

$\cos B=\cos b\cos A$

라는 공식을 만들었다. 이 공식은 ‘Geber의 정리’라고도 한다. 그가 자신의 저서 “별과 수와 운동에 대해서”에서 아라비아어의 ‘dschiba’를 ‘sinus’로 번역한 것이 오늘날 sine의 어원이 되었다.



아라비아 수학자들은 수직과 수평의 ‘그림자 표’를 만들어 사용하였는데, 이것은 오늘날의 탄젠트 표와 같은 것이다.

3. 삼각법의 발전

그 후 레티쿠스(Rheticus ; 1514~1576), 네이피어(Napier, J. ; 1550~1617), 케플러(Kepler,

J. ; 1571～1630) 등을 거쳐서 뉴턴(Newton, I. ; 1642～1727)에 이르러 일반각이 정확하게 인식되고 $\sin x$, $\cos x$의 급수 전개가 발견되었다. 특히 프랑스의 비에트(Viéte, F. ; 1540～1603)에 의하여 여러 가지 삼각함수의 공식이 기호화되었으며, 독일의 레기오몬타누스(Regiomontanus ; 1436～1476)에 의하여 체계화되어 천문학과 분리된 수학의 한 분야로서 발전하게 되었다. 레기오몬타누스는 프톨레마이오스의 저서 "알마게스트"를 번역하면서 삼각함수에 관심을 갖게 되었고, 5권으로 된 "모든 종류의 삼각형(De triangulis omnimodis)"을 출판하였다. 이 책의 첫 두 권은 평면삼각법에 관한 내용이고, 나머지 세 권은 구면삼각법에 관한 내용이다.

4. 일반각의 함수로서의 삼각법

삼각비가 일반각의 함수로서 인식되기 시작한 것은 함수의 개념이 등장한 17세기 이후로 오일러(Euler, L. ; 1707～1783)가 뉴턴의 $\sin x$, $\cos x$의 급수 전개를 복소수의 변수까지 확장하고 복소수의 편각에 대한 고찰을 시작한 이후이다.

1회전한 각의 크기를 360°로 정의한 것은 1년이 약 360일이라는 사실과 관련지어 설명할 수 있다. 고대 바빌로니아 사람들이 60진법을 사용하였는데, 반지름을 현으로 사용하면 원은 6개의 동일한 부분으로 나누어지므로 360의 $\frac{1}{6}$인 60을 택하였으며, 바빌로니아의 문화를 이어 받은 그리스의 천문학자들은 원을 360개의 부분으로 나누었다.

측정에서 단위와 분할 방법의 선정은 임의적인 것이며, 편의와 단순화를 위해 특정한 단위를 택하는 의식적인 노력을 기울이지만 각을 측정하는 60분법은 그러한 1년이 약 360일이라는 사실과 관련지어 결정된 것이다. 반면 호도법은 19세기 말에 새로운 각의 단위가 필요해짐에 따라 수학자와 물리학자가 의식적으로 노력하여 얻은 결과이다. 라디안(radian)이라는 명칭은 radial angle(반지름 각)에서 나온 합성어로, 초기에는 'radial', 'π–측도', '원 측도', '호 측도' 등의 용어가 사용되었다.

삼각함수는 물리학, 공학 등에서 주기적인 성질을 가지는 자연 현상을 연구하는 데 사용된다. 이를테면 반지름의 길이가 a인 원둘레 위를 등각속도 ω rad/sec로 원운동하는 점 Q가 있을 때, 수평 방향의 지름 위의 Q의 정사영을 P라고 하면 점 P는 단진동 운동을 한다.

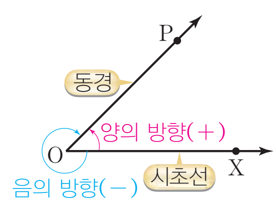
시각 $t=0$일 때 $\angle$POQ의 크기를 α라고 하면 시각 t일 때, 점 P의 좌표는

$$x=a\cos(\omega t+\alpha)$$

로 나타내어지므로 점 P의 운동 상태를 쉽게 알 수 있다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅱ. 삼각함수	쪽수	교과서 48~52쪽
소단원	1. 삼각함수의 뜻과 그래프　01 일반각과 호도법	차시	1/26
학습 목표	**동경과 시초선의 뜻을 안다.**		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 동경과 시초선의 뜻을 안다.	
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◎ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 해결하도록 한다. ◎ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 **각의 확장** (1) 두 반직선 OX, OP에 의해 정해진 $\angle XOP$의 크기는 반직선 OP가 점 O를 중심으로 반직선 OX에서 반직선 OP의 위치까지 회전한 양으로 정의한다. (2) 이때 반직선 OX를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 한다.  (3) 동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시계 반대 방향을 양의 방향, 시계 방향을 음의 방향이라고 정하고, 음의 방향으로 회전하여 생기는 각의 크기는 음의 부호를 붙여서 나타낸다. ◎ 문제 1번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 일반각에 대하여 알아본다.	

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원		Ⅱ. 삼각함수	쪽수	교과서 52~53쪽
소단원		1. 삼각함수의 뜻과 그래프 01 일반각과 호도법	차시	2/26
학습 목표		일반각의 뜻을 안다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 동경이 한 바퀴 이상을 돌 때에는 어떻게 각을 나타낼 수 있을지 말하여 보자. ◐ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 일반각의 뜻을 안다.		
전개	개념 학습 문제 해결	◐ 학습 내용 설명 **일반각** (1) 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 $\alpha°$라고 하면 ∠XOP의 크기는 다음과 같이 나타낼 수 있다. $360° \times n + \alpha°$ (단, n은 정수) (2) 동경 OP가 좌표평면의 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다. ◐ 문제 2, 3번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◐ 사고력 기르기를 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 호도법에 대하여 알아본다.		

1 삼각함수의 뜻과 그래프

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 일반각과 호도법의 뜻을 알게 한다.

② 삼각함수의 뜻을 알고, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

③ 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 일반각과 호도법	일반각
	호도법
02 삼각함수	삼각함수
	삼각함수 사이의 관계
03 삼각함수의 그래프와 성질	사인함수의 그래프
	코사인함수의 그래프
	탄젠트함수의 그래프
	삼각함수의 성질
04 삼각함수의 활용	삼각함수의 방정식과 부등식에의 활용
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 50 쪽

1 삼각함수의 뜻과 그래프

하루에 두 번씩 갈라지는 바닷길

제부도는 경기도 화성시 앞바다에 위치한 작은 섬이다. 이 섬의 넓이는 1 km^2이고, 해안선 길이는 12 km에 불과해 여의도보다 작은 섬이지만 주말이면 많은 사람들이 찾는 곳이다.

이렇듯 작은 섬에 많은 사람들이 찾아오는 것은 바닷길이 갈라지는 자연 현상으로 유명하기 때문이다. 제부도는 하루 두 차례씩 뭍과 제부도를 연결하는 바닷길이 얼굴을 내민다. 바다가 썰물일 때, 4～5 m 깊이의 바닷물이 빠져나가 바다 속에 잠겨 있던 2.3 km의 바닷길이 모습을 드러낸다.

흔히 '모세의 기적' 이라 불리는 이 현상 덕에 제부도는 관광 명소가 되었다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 73 쪽

해수면의 최대 높이와 그때의 시각을 알 수 있을까?

들어가면서 우리 주위에는 주기적으로 일어나는 현상이 많이 있다. 시계추의 운동, 우리 몸의 바이오리듬 등이 자주 확인할 수 있는 현상이다. 이러한 주기적인 현상을 연구하는 데 삼각함수가 유용하게 사용된다.

이 단원에서는 일반각과 호도법, 삼각함수와 그래프를 이용하여 그 성질을 이해하고, 이를 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있도록 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 일반각의 뜻을 알고, 주어진 각의 일반각을 구할 수 있다.	상	일반각의 뜻을 알고, 주어진 각의 일반각을 구할 수 있다.
	중	주어진 각이 나타내는 동경을 좌표평면에 그릴 수 있다.
	하	각의 크기는 회전 방향에 따라 양의 값 또는 음의 값을 가짐을 말할 수 있다.

성취 기준		성취 수준
2. 호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다.	상	호도법의 뜻을 알고, 각을 호도법과 60분법으로 나타낼 수 있다.
	중	특수각을 호도법으로 표현할 수 있다.
	하	라디안의 뜻을 말할 수 있다.
3. 삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다.	상	삼각함수의 뜻을 알고, 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있다.
	중	동경 위의 한 점의 좌표가 주어졌을 때 삼각함수의 값을 구할 수 있다.
	하	특수각에 대한 삼각함수의 값을 구할 수 있다.
4. 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그릴 수 있다.	상	$y=a\sin(bx+c)+d$, $y=a\cos(bx+c)+d$, $y=a\tan(bx+c)+d$(단, a, b, c, d는 실수)의 그래프를 그리고, 각 함수의 정의역, 치역, 주기를 구할 수 있다.
	중	$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프를 그리고, 각 함수의 정의역, 치역, 주기를 구할 수 있다.

01 일반각과 호도법

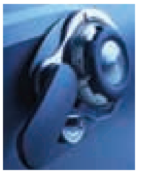
- 일반각과 호도법의 뜻을 안다.
- 호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 나타낼 수 있다.

일반각이란 무엇인가?

생각 열기

다이얼 잠금장치

서류나 귀중품을 보관하는 금고의 잠금장치 중에는 숫자가 적힌 다이얼을 여러 번 돌려 번호를 정확하게 맞추어야 열리도록 설계되어 있는 것이 있다. 이런 잠금장치를 열기 위해서는 다이얼을 올바른 방향으로 돌려야 하며 돌리는 양도 정확해야 한다.



탐구 활동

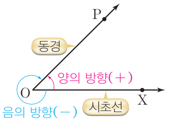
금고의 잠금장치를 열기 위하여 다이얼을 시계 반대 방향으로 두 바퀴 돌린 후, 시계 방향으로 한 바퀴 반 돌렸다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다이얼을 시계 반대 방향으로 돌린 각의 크기는 모두 몇 도인가?
2. 다이얼을 시계 방향으로 돌린 각의 크기는 모두 몇 도인가?
3. 다이얼의 위치는 처음 위치에서 어느 방향으로 몇 도 돌린 각의 크기와 같은지 말하여 보자.

지금까지는 각의 크기를 0°에서 360°까지의 범위로 나타내었다. 하지만 다이얼 잠금장치와 같이 여러 바퀴를 회전하거나 회전하는 방향을 구분해야 할 필요가 있을 때에는 좀 더 넓은 범위의 각의 크기가 필요하다.

이제 각의 크기의 뜻을 정의하고, 그 범위를 확장하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 반직선 OX, OP에 의해 정해진 $\angle XOP$의 크기는 반직선 OP가 점 O를 중심으로 반직선 OX에서 반직선 OP의 위치까지 회전한 양으로 정의한다. 이때 반직선 OX를 **시초선**, 반직선 OP를 **동경**이라고 한다.



또한 동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시계 반대 방향을 양의 방향, 시계 방향을 음의 방향이라고 정하고, 음의 방향으로 회전하여 생기는 각의 크기는 음의 부호(−)를 붙여서 나타낸다.

- 시초선은 처음 시작하는 선이라는 뜻이고, 동경은 움직이는 선이라는 뜻이다.
- 양의 방향으로 회전하여 생기는 각의 크기는 양의 부호(+)를 붙여 나타내지만 보통 생략한다.

성취 기준	성취 수준	
	하	$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프를 그릴 수 있다.
5. 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.	상	삼각함수를 활용하여 주어진 구간 안에서 간단한 부등식의 해를 구할 수 있다.
	중	삼각함수를 활용하여 주어진 구간 안에서 간단한 방정식의 해를 구할 수 있다.
	하	삼각함수를 활용하여 예각의 범위에서 간단한 방정식의 해를 구할 수 있다.

01 일반각과 호도법

소단원 지도 목표

① 일반각의 뜻을 알게 한다.
② 호도법의 뜻을 알고, 육십분법과 호도법 사이의 관계를 이해하게 한다.
③ 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 호도법을 이용하여 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 동경이 회전한 양으로 정의되는 일반각의 크기는 크기와 방향을 가진다는 것에 주의하도록 지도한다.
2. 동경의 위치가 같아도 그 동경이 나타내는 각의 크기는 다를 수 있음을 유의시킨다.
3. 호도법의 각의 단위인 라디안은 실수값임을 이해하게 하고, 호도법의 단위 라디안을 생략하고 사용함을 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

- 시초선(始初線, ray)
- 동경(動徑, radius)
- 일반각(一般角, general angle)
- 라디안(radian)
- 호도법(弧度法, circular measure)

생각 열기 참/고/자/료

다이얼 자물쇠는 17세기 초 영국에서 사용된 '문자 맞춤식 자물쇠'에서 유래되었다. 이것에는 문자나 숫자가 새겨진 많은 고리가 축에 연결되어 있어, 특정 글씨나 숫자로 만들기 위해 고리를 돌리면 고리 안쪽의 홈들이 모두 한 줄로 맞추어지면서 축을 제거할 수 있게 된다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 다이얼의 회전량과 방향을 이용하여 일반각의 개념을 이해하기 위한 것이다.

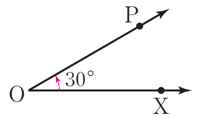
1. 한 바퀴는 360°이므로 두 바퀴를 돌린 각의 크기는 $\mathbf{720^\circ}$이다.
2. 반 바퀴는 180°이므로 한 바퀴 반을 돌린 각의 크기는 $360^\circ+180^\circ=\mathbf{540^\circ}$이다.
3. 시계 방향으로 돌린 각의 크기는 720°이고, 시계 반대 방향을 돌린 각의 크기는 540°이므로 처음 위치에서 시계(반대) 방향으로 $720^\circ-540^\circ=\mathbf{180^\circ}$만큼 돌린 각의 크기와 같다.

1

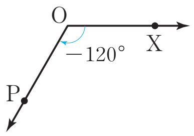
목표| 각의 크기가 주어질 때, 동경과 시초선을 그림으로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| 반직선 OX를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 하면

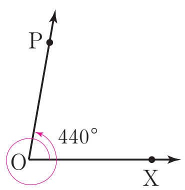
(1)



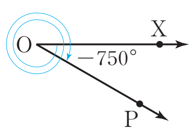
(2)



(3)



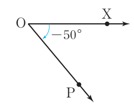
(4)

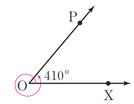


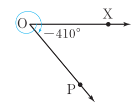
교과서 52 쪽

따라서 ∠XOP의 동경 OP는 점 O를 중심으로 음의 방향으로 회전하면 각의 크기를 음수의 범위로 확장할 수 있다. 또 한 바퀴 이상 회전할 수 있으므로 360°보다 큰 각 또는 −360°보다 작은 각을 생각할 수 있다.

이를테면 −50°, 410°, −410°인 각을 그림으로 나타내면 다음과 같다.

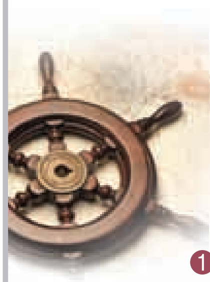






문제 1 다음 각에 대한 시초선과 동경의 위치를 그림으로 나타내어라.

(1) 30° (2) −120°
(3) 440° (4) −750°

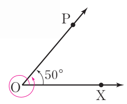


시초선 OX는 고정되어 있으므로 ∠XOP의 크기가 정해지면 동경 OP의 위치도 하나로 정해진다.

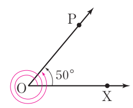
그러나 동경 OP의 위치가 정해지더라도 시초선 OX로부터 동경 OP가 어느 방향으로 회전하였는가 또는 몇 바퀴를 회전하였는가에 따라 ∠XOP의 크기는 여러 가지 값을 가질 수 있으므로 ∠XOP의 크기는 하나로 정해지지 않는다.

이를테면 다음 그림과 같이 동경 OP의 위치는 50°로 정해져 있지만 ∠XOP의 크기는 410°, 770°, −670° 등 여러 가지 값을 가질 수 있다.

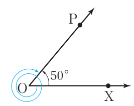
❶



$360°\times1+50°$
$=410°$



$360°\times2+50°$
$=770°$



$360°\times(-2)+50°$
$=-670°$

일반적으로 $\alpha°$는 $0°\le\alpha°<360°$의 범위에서 나타낸다.

일반적으로 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 $\alpha°$라고 하면 ∠XOP의 크기는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

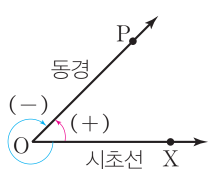
$$360°\times n+\alpha° \text{ (단, } n\text{은 정수)}$$

이것을 동경 OP가 나타내는 **일반각**이라고 한다.

본문 해설

❶ 50°, 410°, 770°, −670°는 그림으로 나타낼 때, 그 동경의 위치는 모두 일치하지만 서로 다른 크기의 각이 존재함을 보여준다.

삼각함수에서 이용하는 각의 개념은 다음과 같다.



삼각함수에서는 도형으로서의 ∠XOP는 반직선 OX를 고정되어 있는 것으로 보고, 반직선 OP가 OX의 위치에서 O를 중심으로 하여 적당히 회전하여 $\overrightarrow{OP}$의 위치가 되었다고 본다. 이때 위의 그림과 같이 회전 방향에 따라 각의 크기에 양, 음을 생각하고 회전량을 생각하여 서로 구별한다. 그러면 도형으로서의 각이 같아도 회전량에 따라 서로 다른 각이 되며, 이렇게 회전량을 함께 생각하여 구별되도록 정의한 각을 일반각이라고 한다. 또 일반각에서 그 크기는 회전 방향에 따라 양, 음의 부호를 붙여서 측정하는 것으로 한다.

일반각을 표현하는 방법은 회전 방향과 회전량을 그림으로 나타내든가, 아니면 그 크기를 각 자체와 구별하지 않고 크기 $360°\times n+\theta$(단, n은 정수)로 나타낸다. 어느 경우에나 꼭짓점은 좌표축의 원점에 고정하고 시초선은 x축의 양의 방향과 일치하는 반직선으로 정한다.

2

목표| 일반각의 뜻을 알고, 동경이 나타내는 일반각을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $70°=360°\times0+70°$이므로

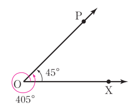
$360°\times n+70°$ (단, n은 정수)

(2) $420°=360°\times1+60°$이므로

$360°\times n+60°$ (단, n은 정수)

보기 시초선 OX와 동경 OP가 나타내는 한 각이 405°이면 $405^\circ=360^\circ\times1+45^\circ$이므로 405°와 45°가 나타내는 동경은 일치한다. 따라서 405°의 동경이 나타내는 일반각은 다음과 같다.

$360^\circ\times n+45^\circ$ (단, n은 정수)

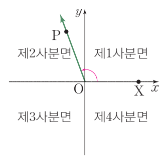


문제 2 다음 각의 동경이 나타내는 일반각을 구하여라.

(1) 70° (2) 420°

(3) -770° (4) -1200°

❶ 일반각의 꼭짓점을 좌표평면 위의 원점 O에 잡고, 시초선 OX를 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 OP가 좌표평면의 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다.



● 동경이 좌표축 위에 있으면 어느 사분면에도 속하지 않는다.

보기 (1) $780^\circ=360^\circ\times2+60^\circ$이므로 780°는 제1사분면의 각이다.
(2) $-210^\circ=360^\circ\times(-1)+150^\circ$이므로 -210°는 제2사분면의 각이다.

문제 3 다음 각은 제 몇 사분면의 각인지 말하여라.

(1) 300° (2) 1200°

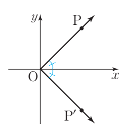
(3) -150° (4) -700°

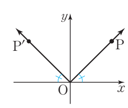
사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

두 동경 OP와 OP′이 다음과 같을 때, 두 동경이 나타내는 일반각 사이에는 어떤 관계가 있는지 토의하여 보자.

(1) x축에 대하여 대칭 (2) y축에 대하여 대칭





(3) $-770^\circ=360^\circ\times(-3)+310^\circ$이므로
$360^\circ\times n+310^\circ$ (단, n은 정수)

(4) $-1200^\circ=360^\circ\times(-4)+240^\circ$이므로
$360^\circ\times n+240^\circ$ (단, n은 정수)

본문 해설

❶ 좌표평면에서 일반각은 꼭짓점을 원점에 시초선을 x축의 양의 방향으로 잡고 주어진 각에 대한 동경을 결정한다.
이때 동경이 나타내는 각이 놓인 위치에 따라
제1사분면의 각, 제2사분면의 각,
제3사분면의 각, 제4사분면의 각
이라고 한다.
동경이 x축 또는 y축과 겹치는 각, 즉
0°, 90°, 180°, 270°, 360°
는 어느 사분면에도 속하지 않는다.

3

목표| 임의의 각 θ가 몇 사분면의 각인지 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) $300^\circ=90^\circ\times3+30^\circ$이므로 **제4사분면의 각이다.**

(2) $1200^\circ=360^\circ\times3+120^\circ$이고 120°는 제2사분면의 각이므로 1200°는 **제2사분면의 각이다.**

(3) $-150^\circ=360^\circ\times(-1)+210^\circ$는 **제3사분면의 각이다.**

(4) $-700^\circ=360^\circ\times(-2)+20^\circ$이고 20°는 제1사분면의 각이므로 -700°는 **제1사분면의 각이다.**

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 두 동경이 x축 또는 y축에 대하여 대칭일 때, 두 동경이 나타내는 일반각 사이의 관계식을 알아보기 위한 문제이다.

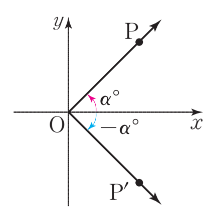
풀이| (1) x축에 대하여 대칭인 두 동경 OP와 OP′이 나타내는 일반각은 각각

$\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$,
$\theta'=360^\circ\times m-\alpha^\circ$
(단, m, n은 정수)

이므로

$\theta+\theta'=360^\circ\times l$ (단, l은 정수)

이 성립한다.



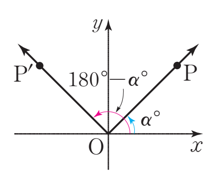
(2) y축에 대하여 대칭인 동경 OP와 OP′이 나타내는 일반각은 각각

$\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$,
$\theta'=360^\circ\times m+180^\circ-\alpha^\circ$
(단, m, n은 정수)

이므로

$\theta+\theta'=360^\circ\times l+180^\circ$(단, l은 정수)

가 성립한다.



생각 열기 참/고/자/료

지구는 남극과 북극을 지나는 선을 축으로 서에서 동으로 자전하기 때문에 북극성을 기준으로 별은 하루에 한 바퀴씩 동에서 서로 회전하는 것처럼 보이는데, 이것을 별의 일주라고 한다.

별의 일주는 지구의 위도에 따라 다르게 나타난다.

적도 지방에서는 별이 동쪽 지평선에서 수직으로 떠서 서쪽 지평선으로 수직으로 진다.

북반구의 중위도 지방에서는 별이 동쪽에서 비스듬히 떠서 남쪽을 지나 서쪽 지평선으로 비스듬히 진다.

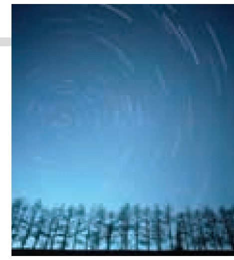
북극 지방에서는 별이 지평선과 나란하게 북극성을 중심으로 시계 반대 방향으로 회전한다.

교과서 54 쪽

호도법이란 무엇인가?

생각 열기 **별의 일주**

카메라로 밤하늘의 사진을 찍을 때, 오랜 시간 동안 셔터를 열고 찍으면 천체들이 움직인 자취가 곡선으로 나타난 별의 일주 사진을 얻을 수 있다. 오른쪽 그림은 북극성을 중심으로 찍은 일주 사진으로, 별의 자취가 북극성을 중심으로 하는 원의 호 모양을 이루고 있으며 그 길이는 노출 시간에 비례한다.

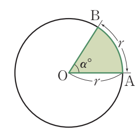


탐구 활동 다음 물음에 답하여 보자.

1. 생각 열기의 별의 일주 사진에서 모든 호의 중심각의 크기가 같은지 말하여 보자.
2. 반지름의 길이와 호의 길이가 같을 때, 부채꼴의 중심각의 크기는 반지름의 길이에 관계없이 항상 일정하다고 할 수 있는지 말하여 보자.

지금까지는 각의 크기를 나타낼 때, $30°$, $60°$, $120°$와 같이 도($°$)를 단위로 하는 육십분법을 사용하였다. 이제 각의 크기를 나타내는 새로운 단위에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호 AB에 대한 중심각 ∠AOB의 크기는 반지름의 길이 r에 관계없이 일정하다. 이때 부채꼴의 중심각 ∠AOB의 크기를 $\alpha°$라고 하면, 한 원에서 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 다음이 성립한다.



$$2\pi r : r = 360° : \alpha°,\quad \alpha° = \frac{180°}{\pi}$$

따라서 이 부채꼴의 중심각의 크기 $\alpha°$는 반지름의 길이 r에 관계없이 일정하다. 이 일정한 각의 크기 $\frac{180°}{\pi}$를 1 **라디안**이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 **호도법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

라디안(radian)은 반지름(radius)과 각(angle)을 나타내는 영어 단어의 합성어이다.

육십분법과 호도법 사이의 관계

$$1\text{라디안} = \frac{180°}{\pi},\quad 1° = \frac{\pi}{180}\text{라디안}$$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 일주 사진의 호의 길이와 중심각 사이의 관계를 이용하여 호의 길이와 반지름의 길이가 같은 부채꼴의 중심각의 크기는 일정함을 알도록 하기 위한 것이다.

1. 일주 사진의 각 천체는 같은 시간 동안 회전한 것이므로 모든 호의 중심각은 같다고 할 수 있다.

2. 한 천체의 호의 길이와 반지름의 길이가 같을 때, 호의 길이는 반지름의 길이에 비례하므로 나머지 천체들도 호의 길이와 반지름의 길이가 같다. 위의 **1**에서 모든 천체의 중심각의 크기는 같으므로 반지름의 길이와 호의 길이가 같은 부채꼴은 크기가 변하더라도 중심각의 크기는 일정함을 알 수 있다.

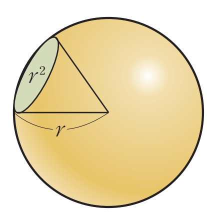
읽/기/자/료 여러 가지 각의 단위

• 육십분법: 고대 바빌로니아인들은 1년을 360일로 생각하여 원주를 360등분 한 것 중의 하나를 1일, 그것의 중심각의 크기를 $1°$의 단위로 하여 각의 크기를 나타내었다.
또 360이 60의 배수인 것에 주목하여 $1°$를 60등분 한 것을 $1'$(분), 다시 $1'$을 60등분 한 것을 $1''$(초)라고 하였는데 이것은 오늘날에도 시간의 단위로 이용되고 있다.

• Grade: 각의 크기를 십진법에 맞춘 것으로 직각인 $90°$를 100등분하여 1 grade로 나타낸 것이다. 즉
$90° = 100$ grade, 1 grade $= 0.9°$

• 방위: 동서남북을 기준으로 하여 북쪽과 동쪽 사이의 각인 $45°$를 '북동' 등으로 표시하는 방식이다. 지리학에서 많이 쓰인다.

• 스테라디안(sr): 반지름의 길이가 r인 구의 표면에서 넓이가 r^2인 입체각의 크기를 단위로 나타낸다.



호도법을 사용할 때에는 흔히 라디안이라는 단위를 생략한다.

❶ **보기** (1) $30^\circ=30\times\frac{\pi}{180}$(라디안)$=\frac{\pi}{6}$(라디안) (2) $\frac{\pi}{3}$(라디안)$=\frac{\pi}{3}\times\frac{180^\circ}{\pi}=60^\circ$

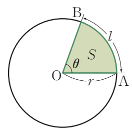
문제 4 다음에서 육십분법은 호도법으로, 호도법은 육십분법으로 나타내어라.

(1) 60°　　(2) -150°

(3) $\frac{2}{3}\pi$　　(4) $-\frac{3}{2}\pi$

❷ 호도법으로 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 나타내어 보자.

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴 OAB에서 호의 길이를 l이라고 하면 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로



$360^\circ=360\times\frac{\pi}{180}$
$=2\pi$(라디안)

$$2\pi r : l=2\pi : \theta$$
$$l=r\theta$$

이다. 또 부채꼴의 넓이를 S라고 하면 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 비례하므로

$$\pi r^2 : S=2\pi : \theta$$
$$S=\frac{1}{2}r^2\theta$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$$l=r\theta,\ S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}rl$$

문제 5 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $r=3$이고 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때, l과 S의 값

(2) $l=2$이고 $\theta=45^\circ$일 때, r와 S의 값

문제 6 호의 길이가 π cm이고, 넓이가 $\frac{3}{2}\pi$ cm^2인 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 구하여라.

본문 해설

❶ 육십분법과 호도법 사이에 각의 단위를 변형할 때, 다음과 같이 자주 이용하는 각(특수각)의 관계를 기억하면 편리하다.

호도법	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
육십분법	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

4

목표| 육십분법과 호도법 사이의 관계를 이해하게 한다.

풀이| (1) $60^\circ=60\times\frac{\pi}{180}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$

(2) $-150^\circ=-150\times\frac{\pi}{180}=\boldsymbol{-\frac{5}{6}\pi}$

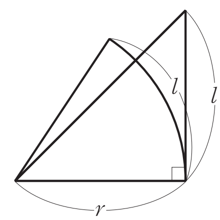
(3) $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=\boldsymbol{120^\circ}$

(4) $-\frac{3}{2}\pi=-\frac{3}{2}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=\boldsymbol{-270^\circ}$

본문 해설

❷ 반지름의 길이가 r이고 중심각의 크기가 1라디안인 부채꼴의 호의 길이는 r, 넓이는 $\frac{1}{2}r^2$이다.

또 반지름의 길이가 r이고 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이는 밑변의 길이가 r이고 높이가 l인 직각삼각형의 넓이와 같다.



5

목표| 호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $l=r\theta=3\times\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\pi}$

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{3}{2}\pi}$

(2) $\theta=45^\circ=\frac{\pi}{4}$이므로 $l=r\theta$에서

$r=\frac{l}{\theta}=\frac{2}{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{8}{\pi}}$

$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times\left(\frac{8}{\pi}\right)^2\times\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{8}{\pi}}$

6

목표| 호의 길이와 넓이가 주어진 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 구할 수 있다.

풀이| 부채꼴의 반지름의 길이를 r cm, 중심각의 크기를 θ라고 하면 부채꼴의 호의 길이는 $r\theta=\pi$ ……①

부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r\times\pi=\frac{3}{2}\pi$ ……②

①, ②에서 $r=3$, $\theta=\frac{\pi}{3}$

따라서 **반지름의 길이는 3 cm**이고, **중심각의 크기는 $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$**이다.

02 삼각함수

소단원 지도 목표

① 삼각함수의 정의를 이해하고, 이를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.
② 삼각함수 사이의 관계를 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 일반각에 대한 삼각함수는 중학교에서 배운 삼각비의 확장이지만 직각삼각형의 변의 길이의 비가 아닌 함수로 다룬다는 점에 주의하게 한다.

2. 삼각함수의 값은 동경의 길이에 따라 변하지 않음을 이해하게 한다.

3. 삼각함수의 값은 각 사분면에 따라 그 부호가 결정됨에 유의하도록 한다.

4. 삼각함수 사이의 관계는 단위원을 이용하여 쉽게 이해하도록 지도한다.

교과서 56 쪽

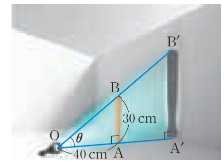
02 삼각함수

● 삼각함수의 뜻을 안다.

삼각함수란 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 빛을 비추고, 점 O로부터 40 cm 떨어져 있는 점 A에 길이가 30 cm인 막대를 수직으로 세웠다. 이때 벽면에 생긴 그림자의 길이를 $\overline{A'B'}$이라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



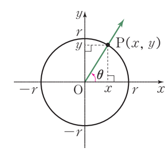
1. $\sin\theta$의 값을 구하여 보자.

2. 1을 이용하여 $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}$의 값을 구하여 보자.

중학교에서는 0°에서 90°까지의 삼각비의 값은 직각삼각형의 크기에 관계없이 일정함을 배웠다.

❶ 이제 삼각비의 정의를 일반각으로 확장하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 x축의 양의 부분을 시초선, 일반각 θ의 동경을 OP라고 하자. 이때 반지름의 길이가 r인 원과 동경 OP의 교점을 $P(x, y)$라고 하면



$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}\,(x\neq0)$$

의 값은 반지름의 길이 r에 관계없이 θ에 따라 각각 하나씩 결정된다. 즉,

$$\theta\longrightarrow\frac{y}{r},\ \theta\longrightarrow\frac{x}{r},\ \theta\longrightarrow\frac{y}{x}\,(x\neq0)$$

의 대응 관계는 각각 θ에 대한 함수이다.

이 함수를 각각 θ에 대한 **사인함수**, **코사인함수**, **탄젠트함수**라고 하며, 다음과 같이 나타낸다.

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\,(x\neq0)$$

새로 나온 용어와 기호

• 사인함수(sine function)
• 코사인함수(cosine function)
• 탄젠트함수(tangent function)
• 삼각함수(三角函數, trigonometric function)
• $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 특정한 각에 대한 삼각비의 값이 직각삼각형의 크기와 관계없이 일정함을 이용하여 원의 크기와 관계없이 삼각함수를 정의할 수 있다는 것을 자연스럽게 이해하게 하기 위한 활동이다.

1. 직각삼각형 OAB의 빗변 OB의 길이는 피타고라스 정리에 의하여 $\sqrt{40^2+30^2}=50$

따라서 $\sin\theta=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\dfrac{30}{50}=\mathbf{\dfrac{3}{5}}$

2. $\triangle OAB$와 $\triangle OA'B'$에서

$\angle O$는 공통, $\angle OAB=\angle OA'B'=90^\circ$

이므로 $\triangle OAB \backsim \triangle OA'B'$

따라서 닮음인 직각삼각형에서 대응하는 변의 길이의 비는 같으므로

$\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{OB'}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}=\mathbf{\dfrac{3}{5}}$

본문 해설

❶ 임의의 일반각 θ에 대하여 θ의 동경은 하나 존재한다. 또 이 동경 위의 임의의 점 $P(x, y)$에 대하여 $\dfrac{x}{r}$, $\dfrac{y}{r}$, $\dfrac{y}{x}(\overline{OP}=r)$의 값은 P에 관계없이 일정하므로 다음 두 대응 (i), (ii)는 각각 함수가 된다.

0<θ<$\frac{\pi}{2}$이면 θ에 대한 삼각함수는 삼각비와 일치한다.

csc, sec, cot는 각각 cosecant, secant, cotangent의 약자이다.

한편 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 역수로 정의한 함수를 차례대로 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수라고 하며, 다음과 같이 나타낸다.

$$\csc\theta=\frac{r}{y}\,(y\neq0),\ \sec\theta=\frac{r}{x}\,(x\neq0),\ \cot\theta=\frac{x}{y}\,(y\neq0)$$

즉, 다음이 성립함을 알 수 있다.

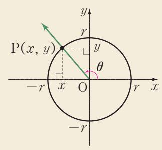
$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta},\ \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\ \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

이상에서 정의한 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 코시컨트함수, 시컨트함수, 코탄젠트함수를 통틀어 일반각 θ에 대한 **삼각함수**라고 한다.

삼각함수의 정의

$\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}\,(x\neq0)$

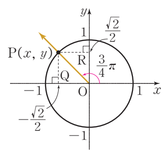
$\csc\theta=\frac{r}{y}\,(y\neq0)$, $\sec\theta=\frac{r}{x}\,(x\neq0)$, $\cot\theta=\frac{x}{y}\,(y\neq0)$



예제 01 $\theta=\frac{3}{4}\pi$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 값을 각각 구하여라.

2 삼각함수의 값은 원의 반지름의 길이 r에 관계없이 일정하므로 $r=1$로 생각하면 편리하다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\frac{3}{4}\pi$를 나타내는 동경 OP와 단위원의 교점을 P(x, y)라고 하면 $\angle POQ=\frac{\pi}{4}$이므로 점 P의 좌표는 P$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.



이때 $\overline{OP}=1$이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}=-1$

$\csc\theta=\frac{r}{y}=\sqrt{2}$, $\sec\theta=\frac{r}{x}=-\sqrt{2}$, $\cot\theta=\frac{x}{y}=-1$

문제 1 다음 각 θ에 대하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 값을 각각 구하여라.

(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $-\frac{5}{4}\pi$

(3) 210° (4) -60°

(i) 대응 1: $\theta \longrightarrow$ (θ의 동경)

(ii) 대응 2: (θ의 동경) $\longrightarrow$ (θ의 동경 위의 임의의 점 P(x, y)에 대하여 $\frac{y}{r}$의 값)

따라서 두 대응 1, 2를 합성한 대응도 함수이다.

f: $\theta \longrightarrow$ (θ의 동경 위의 임의의 점 P(x, y)에 대하여 $\frac{y}{r}$의 값)

즉 $f(\theta)=\frac{y}{r}$

이 대응에서 f 대신 sin 기호를 이용한 것이 사인함수이다.

마찬가지 방법으로 코사인함수와 탄젠트함수도 정의할 수 있다.

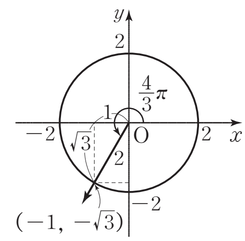
2 각 θ에 대한 삼각함수의 값을 구할 때 반지름의 길이가 1인 원에서 생각할 필요는 없다.

예를 들면 다음 그림에서 $\theta=\frac{4}{3}\pi$일 때

$\sin\theta=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=-\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\sqrt{3}$



단, 동경과 반지름의 길이가 2인 원이 만나는 점의 좌표는

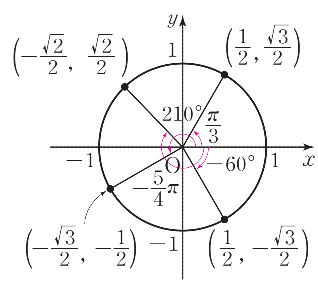
$\left(2\times\left(-\frac{1}{2}\right), 2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$,

즉 $(-1, -\sqrt{3})$

1

목표| 일반각에 대한 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이|



(1) $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\csc\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sec\frac{\pi}{3}=2$, $\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-1$, $\csc\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=\sqrt{2}$,

$\sec\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$, $\cot\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-1$

(3) $\sin 210^\circ=-\frac{1}{2}$, $\cos 210^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 210^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\csc 210^\circ=-2$, $\sec 210^\circ=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot 210^\circ=\sqrt{3}$

(4) $\sin(-60^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-60^\circ)=\frac{1}{2}$

$\tan(-60^\circ)=-\sqrt{3}$, $\csc(-60^\circ)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec(-60^\circ)=2$, $\cot(-60^\circ)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

교과서 58 쪽

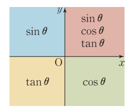
동경이 위치한 사분면에 따라 삼각함수의 값의 부호는 어떻게 결정되는지 알아보자.

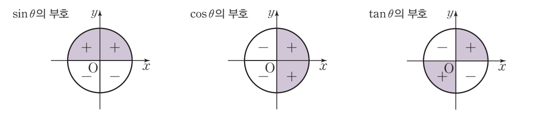
각 θ를 나타내는 동경 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 x좌표와 y좌표의 부호는 동경이 위치한 사분면에 따라 결정되므로 삼각함수의 값의 부호는 다음 표와 같이 정해진다.

● r는 원점과 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 사이의 거리이므로 $r>0$이다.

사분면 / 삼각함수	제1사분면 $(x>0,\ y>0)$	제2사분면 $(x<0,\ y>0)$	제3사분면 $(x<0,\ y<0)$	제4사분면 $(x>0,\ y<0)$
$\sin\theta=\frac{y}{r}$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta=\frac{x}{r}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta=\frac{y}{x}$	$+$	$-$	$+$	$-$

● 각 사분면에서 그 값이 양수인 삼각함수를 적으면 다음 그림과 같다.





한편 $\csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}$, $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$이므로 $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$의 부호는 각각 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 부호와 같다.

예제 02 $\theta=\dfrac{20}{3}\pi$일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$값의 부호를 말하여라.

풀이 각 θ의 동경은 $\dfrac{20}{3}\pi=6\pi+\dfrac{2}{3}\pi=2\pi\times3+\dfrac{2}{3}\pi$

각 θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

$\csc\theta>0$, $\sec\theta<0$, $\cot\theta<0$

문제 2 다음 각 θ에 대하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$값의 부호를 말하여라.

(1) $\dfrac{51}{5}\pi$ (2) $-\dfrac{22}{3}\pi$

(3) 1280° (4) -750°

문제 3 다음을 만족시키는 각 θ는 제 몇 사분면의 각인지 말하여라.

(1) $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ (2) $\sin\theta<0$, $\tan\theta>0$

(3) $\sin\theta\ \cos\theta>0$ (4) $\dfrac{\sec\theta}{\tan\theta}>0$

2

목표| 일반각에 대한 삼각함수의 값의 부호를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{51}{5}\pi=10\pi+\dfrac{\pi}{5}=2\pi\times5+\dfrac{\pi}{5}$

이므로 $\dfrac{51}{5}\pi$는 제1사분면의 각이다.

따라서

$\sin\dfrac{51}{5}\pi>0$, $\cos\dfrac{51}{5}\pi>0$,

$\tan\dfrac{51}{5}\pi>0$, $\csc\dfrac{51}{5}\pi>0$,

$\sec\dfrac{51}{5}\pi>0$, $\cot\dfrac{51}{5}\pi>0$

(2) $-\dfrac{22}{3}\pi=2\pi\times(-4)+\dfrac{2}{3}\pi$이므로 $-\dfrac{22}{3}\pi$는 제2사분면의 각이다.

따라서

$\sin\left(-\dfrac{22}{3}\pi\right)>0$, $\cos\left(-\dfrac{22}{3}\pi\right)<0$,

$\tan\left(-\dfrac{22}{3}\pi\right)<0$, $\csc\left(-\dfrac{22}{3}\pi\right)>0$,

$\sec\left(-\dfrac{22}{3}\pi\right)<0$, $\cot\left(-\dfrac{22}{3}\pi\right)<0$

(3) $1280^\circ=360^\circ\times3+200^\circ$이므로 1280°는 제3사분면의 각이다. 따라서

$\sin 1280^\circ<0$, $\cos 1280^\circ<0$, $\tan 1280^\circ>0$

$\csc 1280^\circ<0$, $\sec 1280^\circ<0$, $\cot 1280^\circ>0$

(4) $-750^\circ=360^\circ\times(-3)+330^\circ$이므로 제4사분면의 각이다. 따라서

$\sin(-750^\circ)<0$, $\cos(-750^\circ)>0$,

$\tan(-750^\circ)<0$, $\csc(-750^\circ)<0$,

$\sec(-750^\circ)>0$, $\cot(-750^\circ)<0$

3

목표| 각 θ에 대한 삼각함수의 값의 부호를 이해하고, 조건을 만족시키는 사분면을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **제2사분면** (2) **제3사분면**

(3) $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$이므로 **제1사분면 또는 제3사분면**

(4) $\sec\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}$, $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$이고

$\dfrac{1}{\cos\theta}>0$, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}>0$ 또는 $\dfrac{1}{\cos\theta}<0$, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}<0$

즉, $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ 또는 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

이므로 **제1사분면 또는 제2사분면**

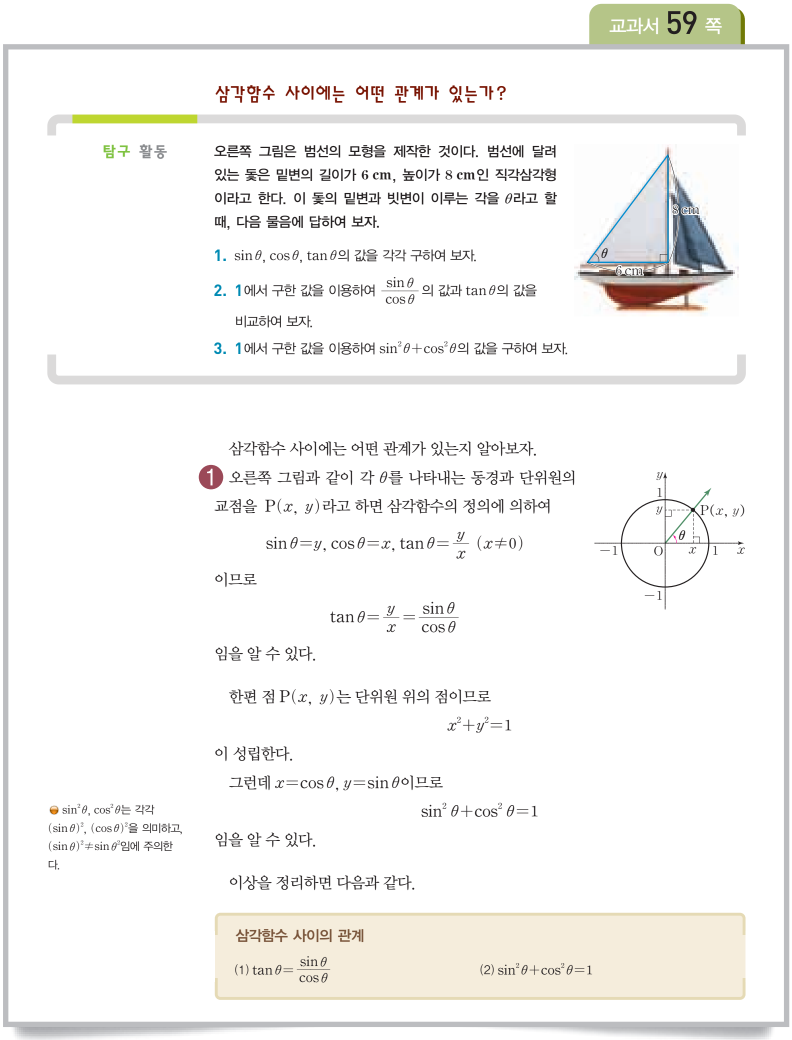
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 직각삼각형에서 구한 삼각함수의 값으로 이루어진 식의 값을 비교해 봄으로써 삼각함수 사이의 관계를 알도록 하기 위한 활동이다.

1. 피타고라스 정리에 의하여 직각삼각형의 빗변의 길이는 $\sqrt{6^2+8^2}=10(\mathrm{cm})$

따라서

$\sin\theta=\dfrac{8}{10}=\mathbf{\dfrac{4}{5}}$, $\cos\theta=\dfrac{6}{10}=\mathbf{\dfrac{3}{5}}$, $\tan\theta=\dfrac{8}{6}=\mathbf{\dfrac{4}{3}}$



교과서 59 쪽

삼각함수 사이에는 어떤 관계가 있는가?

탐구 활동

오른쪽 그림은 범선의 모형을 제작한 것이다. 범선에 달려 있는 돛은 밑변의 길이가 6 cm, 높이가 8 cm인 직각삼각형이라고 한다. 이 돛의 밑변과 빗변이 이루는 각을 θ라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 각각 구하여 보자.
2. 1에서 구한 값을 이용하여 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$의 값과 $\tan\theta$의 값을 비교하여 보자.
3. 1에서 구한 값을 이용하여 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$의 값을 구하여 보자.

삼각함수 사이에는 어떤 관계가 있는지 알아보자.

① 오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin\theta=y,\ \cos\theta=x,\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

이므로

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

임을 알 수 있다.

한편 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 단위원 위의 점이므로

$$x^2+y^2=1$$

이 성립한다.

그런데 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

임을 알 수 있다.

$\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$는 각각 $(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$을 의미하고, $(\sin\theta)^2\neq\sin\theta^2$임에 주의한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수 사이의 관계

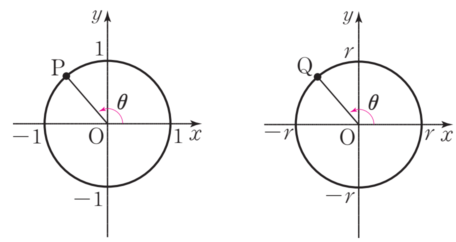
(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

2. $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\dfrac{4}{3}$이므로 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$이다.

3. $\sin^2\theta+\cos^2\theta=\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\mathbf{1}$

본문 해설

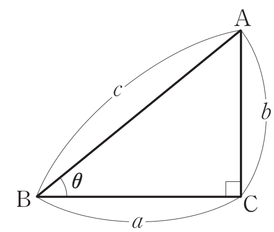
① 삼각함수의 값은 동경의 길이에 따라 변하지 않으므로 그 길이를 1로 놓으면 편리할 때가 있다. 이와 같이 좌표평면 위에서 원점을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 1인 원을 단위원이라고 한다. 이때 반지름에 따른 원 위의 점의 좌표를 삼각함수로 나타내면 다음과 같다.



$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\mathrm{Q}(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

지/도/자/료 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$의 증명

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여



$a^2+b^2=c^2$ ……①

이 성립한다.

이 식의 양변을 c^2으로 나누면

$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$ ……②

그런데

$\dfrac{a}{c}=\cos\theta$, $\dfrac{b}{c}=\sin\theta$ ……③

이므로 ③을 ②에 대입하면 다음 등식이 성립한다.

$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=1$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

읽/기/자/료

기원전 140년경에 살았던 히파르코스(Hipparchos ; ?B.C. 190～?B.C. 125)와 천동설로 잘 알려진 천문학자 프톨레마이오스(Ptolemaeos ; ?85～?165)는 오늘날 우리가 잘 알고 있는 삼각함수 사이의 관계식인

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

을 이미 알고 있었던 것으로 추측된다.

그러나 이 관계식을 현재와 같은 형태로 명확히 정리한 사람은 505년경에 살았던 천문학자 바라히미히라(Verahamijira)로 알려져 있다.

4

목표| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

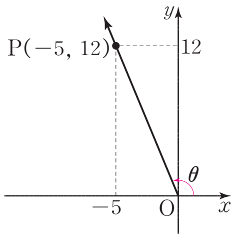
풀이| $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\sin\theta>0$이므로

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\mathbf{\frac{12}{13}}$

따라서 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=\mathbf{-\frac{12}{5}}$

다른 풀이| $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 동경은 제2사분면의 각이므로 오른쪽 그림에서 $\mathrm{P}(-5,\ 12)$이다.



따라서

$\sin\theta=\frac{12}{13}$

$\tan\theta=-\frac{12}{5}$

교과서 60 쪽

예제 03 $\sin\theta=\frac{3}{5}$일 때, $\cos\theta$와 $\tan\theta$의 값을 구하여라. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

풀이 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서 $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta>0$

따라서 $\cos\theta=\frac{4}{5}$

한편 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로 $\tan\theta=\frac{3}{4}$

답 $\cos\theta=\frac{4}{5}$, $\tan\theta=\frac{3}{4}$

문제 4 $\cos\theta=-\frac{5}{13}$일 때, $\sin\theta$와 $\tan\theta$의 값을 구하여라. $\left(단,\ \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

예제 04 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값을 구하여라.

풀이 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

답 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

문제 5 $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

(1) $\sin\theta\cos\theta$ (2) $\sin\theta+\cos\theta$

사고력 기르기

▸추론
의사소통
문제 해결

삼각함수 사이의 관계를 이용하여 다음 등식이 성립함을 설명하여 보자.

(1) $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

(2) $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

5

목표| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있다.

풀이| (1) $\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$

따라서 $\sin\theta\cos\theta=\mathbf{\frac{1}{4}}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\sin\theta-\cos\theta)^2+4\sin\theta\cos\theta$

$=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta>0,\ \cos\theta>0$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{2}}$

사고력 기르기 추론

출제 의도| 이미 알려진 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 새로운 관계를 추론하고, 이를 설명할 수 있도록 하기 위한 문제이다.

풀이| $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ······①

(1) 등식 ①의 양변을 $\cos^2\theta$으로 나누면

$\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+1=\frac{1}{\cos^2\theta}$ (단, $\cos\theta\neq0$)

따라서 $\tan^2\theta+1=\sec^2\theta$

(2) 등식 ①의 양변을 $\sin^2\theta$로 나누면

$1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$ (단, $\sin\theta\neq0$)

따라서 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$

교과서 61 쪽

03 삼각함수의 그래프와 성질

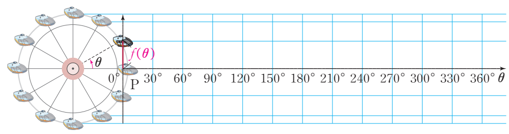
● 삼각함수의 그래프를 그릴 수 있고, 그 성질을 이해한다.

사인함수의 그래프는 어떻게 그리는가?

탐구 활동

놀이공원의 대관람차가 회전하면 곤돌라의 높이는 시시각각으로 변한다. 다음 그림과 같이 한 곤돌라가 P지점에서 시계 반대 방향으로 θ만큼 회전하였을 때의 높이를 $f(\theta)$라고 하자. 물음에 답하여 보자.

1. $\theta=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, \cdots, 330^\circ, 360^\circ$일 때, $(\theta, f(\theta))$를 다음 그림에 점으로 나타내어 보자.

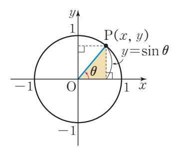


2. **1**에서 구한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

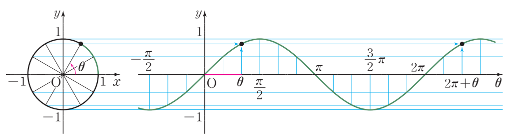
❶ 오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $P(x, y)$라고 하면

$$\sin\theta=\frac{y}{1}=y$$

이므로 점 P가 단위원 위를 움직일 때, $\sin\theta$의 값은 점 P의 y좌표에 의하여 정해진다.



단위원을 이용하여 각 θ의 크기의 변화에 따른 $\sin\theta$의 값의 변화를 좌표평면 위에 나타내어 함수 $y=\sin\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



03 삼각함수의 그래프와 성질

소단원 지도 목표

① 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 그래프를 그리고, 그 성질을 이해하게 한다.

② 주기함수의 뜻을 이해하고 삼각함수가 주기함수임을 알게 한다.

③ 삼각함수의 성질을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 삼각함수의 그래프는 사인, 코사인, 탄젠트에 대해서만 다룬다.

2. 삼각함수의 그래프를 그리기 위하여 단위원을 사용하는 방법을 이해하고 이를 활용하도록 한다.

3. 삼각함수의 그래프를 그리거나 삼각함수와 관련된 문제를 해결할 때 공학적 도구를 활용할 수 있게 한다.

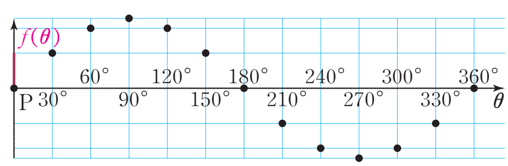
새로 나온 용어와 기호

• 주기함수(週期函數, periodic function)
• 주기(週期, period)

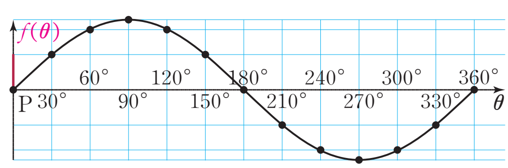
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 일정한 속력으로 원운동하는 물체의 높이를 시간에 대한 함수의 그래프로 나타내어 사인함수의 그래프의 모양을 알도록 하기 위한 것이다.

1.



2.



본문 해설

❶ 사인함수 $y=\sin x$의 그래프는 각각의 실수 x의 값에 대응하는 y의 값을 구하여 점 (x, y)를 좌표평면에 나타낸 것이다.
이것을 기하학적인 측면에서 사인함수의 정의에 따라 쉽게 작도하기 위하여 단위원을 이용하여 변수인 각을 θ로 나타내고, 그 함숫값을 $\sin\theta$로 나타내어 점 $(\theta, \sin\theta)$를 좌표평면에 나타낸다.

본문 해설

❶ 함수 $f(x)$의 주기는 변수 x의 임의의 값에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 상수 p를 말한다. 이때 $p\neq0$인 것을 생각하는 것이 보통이다. 그러나 $p=0$인 경우까지 주기의 개념을 확장하면 임의의 함수는 0이라는 주기를 가진다고 할 수 있다.

1

목표| 사인함수의 그래프로부터 알 수 있는 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $-420^\circ=360^\circ\times(-1)+(-60^\circ)$

이므로

$$\sin(-420^\circ)=\sin(-60^\circ)$$
$$=-\sin 60^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $\sin\frac{7}{3}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

교과서 62 쪽

앞의 그래프에서 알 수 있듯이 함수 $y=\sin\theta$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le1\}$이다. 또 함수 $y=\sin\theta$는 모든 실수에서 연속이다.

한편 $y=\sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, 2π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 따라서 임의의 각 θ에 대하여

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta\ (n\text{은 정수})$$

가 성립함을 알 수 있다.

❶ 일반적으로 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 x에 대하여

$$f(x+p)=f(x)$$

를 만족시키는 상수 $p(p\neq0)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$를 **주기함수**라 하고, 이 상수 p 중에서 가장 작은 양수를 주기함수 $f(x)$의 **주기**라고 한다.

따라서 $y=\sin\theta$는 주기가 2π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

사인함수 $y=\sin\theta$의 그래프와 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le1\}$이다.
(2) 모든 실수에서 연속이다.
(3) $y=\sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $\sin(-\theta)=-\sin\theta$이다.
(4) 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$ (n은 정수)이다.

보기 (1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(2) $\sin\frac{9}{4}\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

문제 1 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin(-420^\circ)$ (2) $\sin\frac{7}{3}\pi$

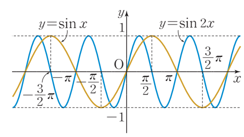
예제 01 함수 $y=\sin 2x$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

❷ 풀이 $f(x)=\sin 2x$라고 하면

$f(x)=\sin 2x=\sin(2x+2\pi)$
$=\sin 2(x+\pi)=f(x+\pi)$

이므로 함수 $y=\sin 2x$의 주기는 π이다.

따라서 $y=\sin 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



본문 해설

❷ $f(x)$가 주기 p인 주기함수이고, a가 양수이면 모든 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$이므로 $f(ax+p)=f(ax)$이다.

여기서 $g(x)=f(ax)$로 놓으면

$$g\left(x+\frac{p}{a}\right)=f(ax+p)=f(ax)=g(x)\ (a>0)$$

이므로 $g(x)=f(ax)$의 주기는 $\frac{p}{a}$이다.

이를테면 $y=\sin x$의 주기가 2π이므로 예제 **01**에서 $y=\sin 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{2}=\pi$가 된다.

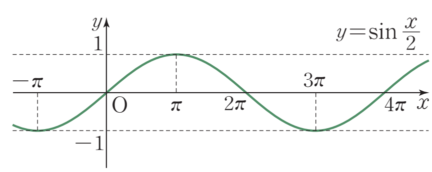
2

목표| 사인함수의 주기를 구하고, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$라고 하면

$$f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\sin\frac{1}{2}(x+4\pi)$$

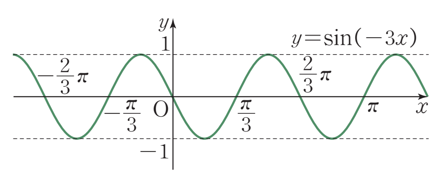
이므로 함수 $y=\sin\frac{x}{2}$의 주기는 $\mathbf{4\pi}$



(2) $\sin(-3x)=-\sin 3x$이므로 $f(x)=-\sin 3x$라고 하면

$$f(x)=-\sin(3x+2\pi)$$
$$=-\sin 3\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)=f\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

이므로 함수 $y=\sin(-3x)$의 주기는 $\mathbf{\frac{2}{3}\pi}$



교과서 63 쪽

문제 2 다음 함수의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\sin\frac{x}{2}$ (2) $y=\sin(-3x)$

예제 02 다음 함수의 치역과 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=2\sin x$ (2) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

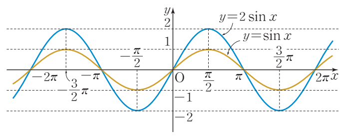
풀이 (1) $f(x)=2\sin x$라고 하면

$f(x)=2\sin x=2\sin(x+2\pi)=f(x+2\pi)$

이므로 함수 $y=2\sin x$의 주기는 2π이다.

또 $-1\le\sin x\le1$에서 $-2\le2\sin x\le2$이므로 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le2\}$이다.

따라서 $y=2\sin x$의 그래프는 다음과 같다.



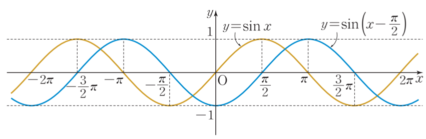
(2) $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)=\sin\left\{(x+2\pi)-\frac{\pi}{2}\right\}=f(x+2\pi)$

이므로 함수 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 주기는 2π이다.

또 $-1\le\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\le1$이므로 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le1\}$이다.

따라서 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$의 그래프는 다음과 같다.



문제 3 다음 함수의 주기와 치역을 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\frac{1}{2}\sin x$ (2) $y=\sin(x+\pi)$

3

목표| 사인함수의 주기와 치역을 구하고, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$라고 하면

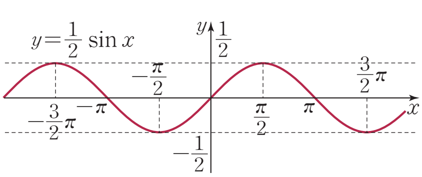
$f(x)=\frac{1}{2}\sin x=\frac{1}{2}\sin(x+2\pi)=f(x+2\pi)$

이므로 함수 $y=\frac{1}{2}\sin x$의 주기는 $\mathbf{2\pi}$이다.

또 $-1\le\sin x\le1$에서 $-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\sin x\le\frac{1}{2}$ 이므로

치역은 $\left\{\boldsymbol{y}\,\middle|\,-\frac{1}{2}\le\boldsymbol{y}\le\frac{1}{2}\right\}$이다.

따라서 $y=\frac{1}{2}\sin x$의 그래프는 다음과 같다.



(2) $f(x)=\sin(x+\pi)$라고 하면

$f(x)=\sin(x+\pi)$

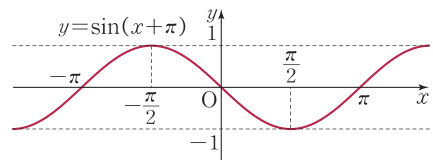
$=\sin\{(x+\pi)+2\pi\}=f(x+2\pi)$

이므로 함수 $y=\sin(x+\pi)$의 주기는 $\mathbf{2\pi}$이다.

또 $-1\le\sin(x+\pi)\le1$이므로

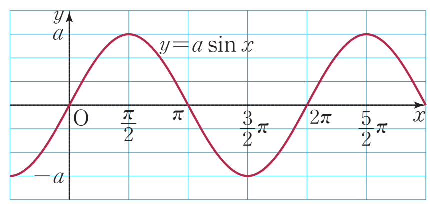
치역은 $\{\boldsymbol{y}\,|\,-1\le\boldsymbol{y}\le1\}$이다.

따라서 $y=\sin(x+\pi)$의 그래프는 다음과 같다.



지/도/자/료 여러 가지 사인함수의 그래프

1. $y=a\sin x\,(a>0)$의 그래프

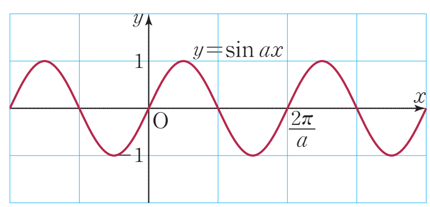


$f(x)=a\sin x$라고 하면

$f(x)=a\sin x=a\sin(x+2\pi)=f(x+2\pi)$

주기는 2π, 최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이다.

2. $y=\sin ax\,(a>0)$의 그래프



$f(x)=\sin ax$라고 하면

$f(x)=\sin ax=\sin(ax+2\pi)$

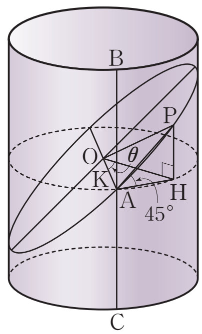
$=\sin a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)=f\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)$

주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$, 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

3. $y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프

$y=a\sin b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$에서 $a\sin bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

읽/기/자/료 원기둥과 사인함수의 그래프



사인함수의 그래프는 원기둥을 비스듬히 자른 옆면의 전개도에 의해서 얻을 수도 있다. 즉, 밑면과 45°로 기울어진 평면으로 원기둥을 잘라서 생기는 단면 위의 점을 P라 하고, 원기둥의 반지름의 길이를 1이라고 한다. 오른쪽 그림과 같이 점 A를 원점으로 하고, 모선 BC를 y축, 전개도에서 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$의 방향을 x축으로 정하면

$x=\overset{\frown}{\mathrm{AH}}=\theta$

$y=\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{HK}}=\sin\theta$

이다. 따라서 x와 y 사이의 관계는 $y=\sin x$를 만족시킨다.

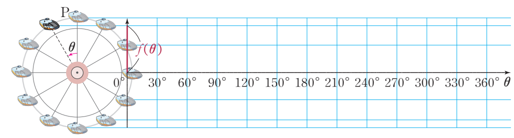
원기둥을 자른 단면인 타원이 전개도에서는 사인함수의 그래프로 바뀐다.

교과서 64 쪽

코사인함수의 그래프는 어떻게 그리는가?

탐구 활동 다음 그림과 같이 곤돌라가 P지점에서 시계 반대 방향으로 θ만큼 회전하였을 때의 높이를 $f(\theta)$라고 하자. 물음에 답하여 보자.

1. $\theta=0°, 30°, 60°, 90°, \cdots, 330°, 360°$일 때, $(\theta, f(\theta))$를 다음 그림에 점으로 나타내어 보자.

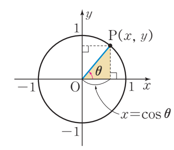


2. 1에서 구한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

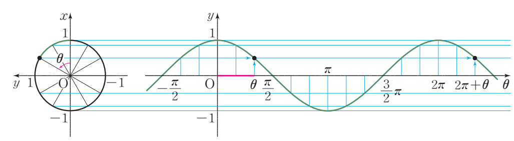
오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면

$$\cos\theta=\frac{x}{1}=x$$

이므로 점 P가 단위원 위를 움직일 때, $\cos\theta$의 값은 점 P의 x좌표에 의하여 정해진다.



단위원을 이용하여 각 θ의 크기의 변화에 따른 $\cos\theta$의 값의 변화를 좌표평면 위에 나타내어 함수 $y=\cos\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



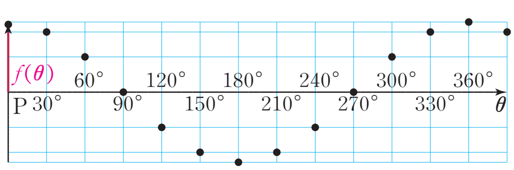
위의 그래프에서 알 수 있듯이 함수 $y=\cos\theta$의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y \mid -1\le y\le 1\}$이다. 또 함수 $y=\cos\theta$는 모든 실수에서 연속이다.

한편 $y=\cos\theta$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 2π 간격으로 같은 모양이 반복된다.

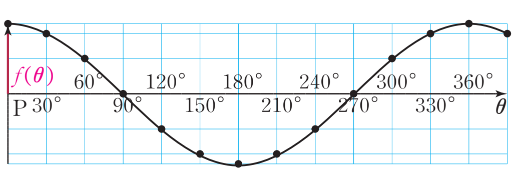
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 일정한 속력으로 원운동하는 물체의 높이를 시간에 대한 함수의 그래프로 나타내어 코사인함수의 그래프의 모양을 알도록 하기 위한 것이다.

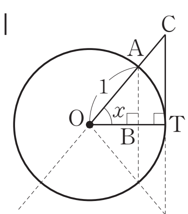
1.



2.



지/도/자/료 삼각함수의 기하학적 의미



오른쪽 그림과 같은 단위원(반지름의 길이가 1인 원) O에서

$\angle\mathrm{AOT}=x$라고 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sin x$, $\overline{\mathrm{OB}}=\cos x$

$\overline{\mathrm{TC}}=\tan x$, $\overline{\mathrm{OC}}=\sec x$

이다.

위의 그림에서 접선과 같이 $\overline{\mathrm{TC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{OC}}$를 연장해서 생각하면 $\overline{\mathrm{AB}}$는 현, $\overline{\mathrm{TC}}$는 접선, $\overline{\mathrm{OC}}$는 할선이 된다.

실제로 sine은 현, tangent는 접선, secant는 할선이라는 뜻이다.

또한 cos은 cosine의 약자이며 라틴어로는 cosinus라고 하며 sinus에 co-가 붙은 것이다.

co-는 상보적이라는 뜻으로 여기서는 여각(complementary angle)에서 온 말이다.

교과서 65 쪽

따라서 임의의 각 θ에 대하여

$\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$ (n은 정수)

가 성립함을 알 수 있다.

따라서 $y=\cos\theta$는 사인함수와 마찬가지로 주기가 2π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

코사인함수 $y=\cos\theta$의 그래프와 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.
(2) 모든 실수에서 연속이다.
(3) $y=\cos\theta$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 즉, $\cos(-\theta)=\cos\theta$이다.
(4) 주기가 2π인 주기함수이다. 즉, $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$ (n은 정수)이다.

보기 (1) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\frac{13}{3}\pi=\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

문제 4 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)$ (2) $\cos 765^\circ$

예제 03 함수 $y=\cos\frac{x}{2}$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

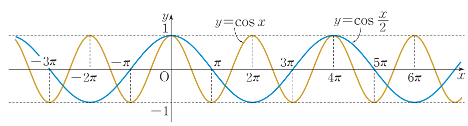
풀이 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$라고 하면

$f(x)=\cos\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{x}{2}+2\pi\right)=\cos\left\{\frac{1}{2}(x+4\pi)\right\}=f(x+4\pi)$

이므로 함수 $y=\cos\frac{x}{2}$의 주기는 4π이다.

또 $-1\le\cos\frac{x}{2}\le 1$이므로 치역은 $\{y\,|\,-1\le y\le 1\}$이다.

따라서 $y=\cos\frac{x}{2}$의 그래프는 다음과 같다.



4

목표| 코사인함수의 그래프와 그 성질을 이용하여 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right)=\cos\left(2\pi\times(-1)-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

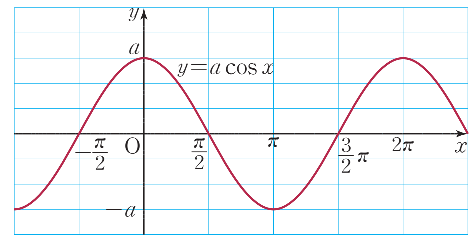
(2) $\cos 765^\circ=\cos(360^\circ\times 2+45^\circ)$

$=\cos 45^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

지/도/자/료 여러 가지 코사인함수의 그래프

1. $y=a\cos x\,(a>0)$의 그래프



$f(x)=a\cos x$라고 하면

$f(x)=a\cos x=a\cos(x+2\pi)$

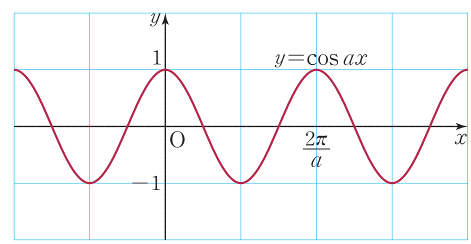
$=f(x+2\pi)$

이므로 주기는 2π

$-a\le a\cos x\le a$이므로

최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이다.

2. $y=\cos ax\,(a>0)$의 그래프



$f(x)=\cos ax$라고 하면

$f(x)=\cos ax=\cos(ax+2\pi)$

$=\cos a\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)=f\left(x+\frac{2\pi}{a}\right)$

이므로 주기는 $\frac{2\pi}{|a|}$

$-1\le\cos ax\le 1$이므로

최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

3. $y=a\cos(bx+c)+d$의 그래프

$y=a\cos(bx+c)+d=a\cos b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$이므로

$y=a\cos bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

5

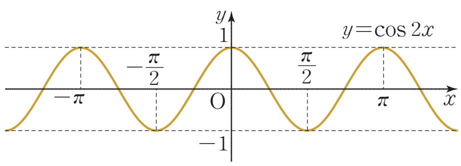
목표| 코사인함수의 주기를 구하고, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=\cos 2x$라고 하면

$f(x)=\cos 2x=\cos (2x+2\pi)$

$\quad =\cos 2(x+\pi)=f(x+\pi)$

함수 $y=\cos 2x$의 주기는 $\boldsymbol{\pi}$



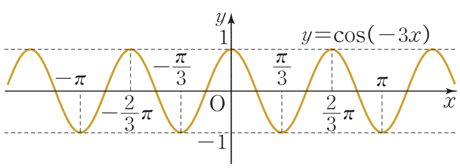
(2) $f(x)=\cos(-3x)=\cos 3x$라고 하면

$f(x)=\cos 3x=\cos (3x+2\pi)$

$\quad =\cos 3\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)=f\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right)$

이므로 함수 $y=\cos (-3x)$의 주기는

$\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi}$



교과서 66쪽

문제 5 다음 함수의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\cos 2x$ (2) $y=\cos(-3x)$

예제 04 함수 $y=2\cos 2x$의 주기와 치역을 구하고, 그래프를 그려라.

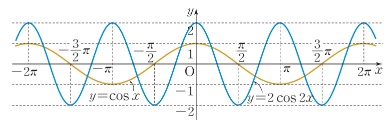
풀이 $f(x)=2\cos 2x$라고 하면

$f(x)=2\cos 2x=2\cos(2x+2\pi)=2\cos\{2(x+\pi)\}=f(x+\pi)$

이므로 함수 $y=2\cos 2x$의 주기는 π이다.

또 $-1\le\cos 2x\le 1$에서 $-2\le 2\cos 2x\le 2$이므로 치역은 $\{y\,|\,-2\le y\le 2\}$이다.

따라서 $y=2\cos 2x$의 그래프는 다음과 같다.



문제 6 다음 함수의 주기와 치역을 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\dfrac{1}{2}\cos \pi x$ (2) $y=-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

다음 물음에 답하여 보자.

(1) 다음 표를 완성하여 보자.

$y=\cos ax$	$y=\cos(-2x)$	$y=\cos(-x)$	$y=\cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$	$y=\cos\frac{1}{2}x$	$y=\cos x$	$y=\cos 2x$
주기					2π	

(2) 실수 $a\,(a\ne 0)$에 대하여 삼각함수 $y=\cos ax$의 주기를 나타내는 방법을 말하여 보자.

6

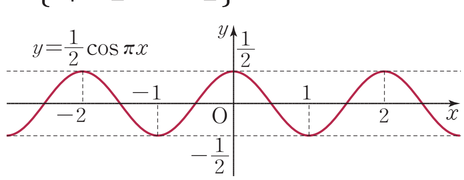
목표| 코사인함수의 주기와 치역을 구하고, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos \pi x$라고 하면

$f(x)=\dfrac{1}{2}\cos (\pi x+2\pi)=\dfrac{1}{2}\cos \pi(x+2)=f(x+2)$

이므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos \pi x$의 주기는 $\mathbf{2}$,

치역은 $\left\{\boldsymbol{y}\,\middle|\,\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}\le y\le\dfrac{1}{2}}\right\}$

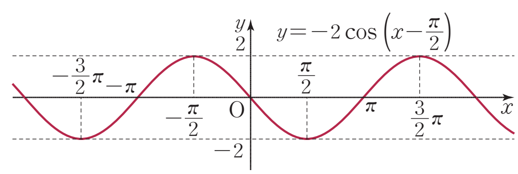


(2) $f(x)=-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$f(x)=-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}+2\pi\right)=f(x+2\pi)$

이므로 $f(x)=-2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$의 주기는 $\boldsymbol{2\pi}$,

치역은 $\{\boldsymbol{y\,|\,-2\le y\le 2}\}$



사고력 기르기 추론

출제 의도| $y=\cos ax$ 꼴의 코사인함수의 주기를 나타내는 방법을 추론해 봄으로써 일반적인 형태의 삼각함수의 주기를 알게 하기 위한 것이다.

풀이| (1) $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{2\pi}$, $\boldsymbol{4\pi}$, $\boldsymbol{4\pi}$, $\boldsymbol{\pi}$

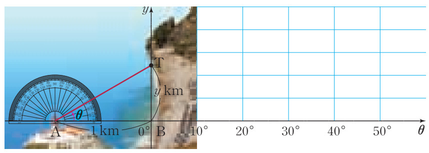
(2) 실수 $a(a\ne 0)$에 대하여 $y=\cos ax$ 꼴의 코사인함수의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|a|}$로 나타낼 수 있다.

교과서 67 쪽

탄젠트함수의 그래프는 어떻게 그리는가?

탐구 활동

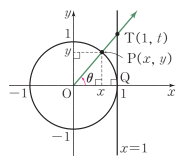
다음 그림과 같이 점 A에서 시계 반대 방향으로 회전하는 등대의 불빛이 직선인 해안선을 따라서 비추고 있다. 등대에서 해안선까지의 거리 $\overline{AB}=1$ km이고, 등대의 불빛이 $\overline{AB}$에서 θ만큼 회전하였을 때, 해안선에 비추는 점을 T라고 한다. $\overline{BT}=y$ km라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1. $\theta=0^\circ,\ 10^\circ,\ 20^\circ,\ 30^\circ,\ 40^\circ,\ 50^\circ$일 때, 점 $(\theta,\ y)$를 위의 그림에 점으로 나타내어 보자.

2. **1**에서 구한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하여 보자.

❶ 오른쪽 그림과 같이 각 θ를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하고, 동경 OP의 연장선이 직선 $x=1$과 만나는 점을 $\mathrm{T}(1,\ t)$라고 하자.

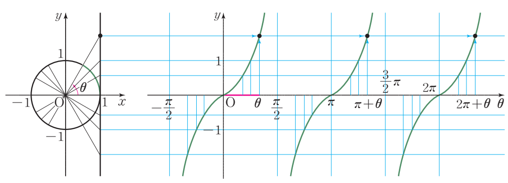


이때 점 T에서 x축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{Q}(1,\ 0)$이라고 하면

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\overline{QT}}{\overline{OQ}}=\frac{t}{1}=t$$

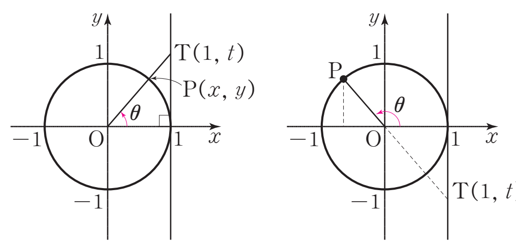
이므로 점 P가 단위원 위를 움직일 때, $\tan\theta$의 값은 점 T의 y좌표에 의하여 정해진다.

단위원을 이용하여 각 θ의 크기의 변화에 따른 $\tan\theta$의 값의 변화를 좌표평면 위에 나타내어 함수 $y=\tan\theta$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



본문 해설

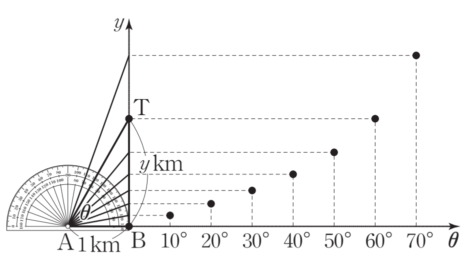
❶ 아래 그림과 같이 좌표평면 위에서 각 θ를 나타내는 동경과 단위원과의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하고, 점 $(1,\ 0)$에서의 단위원의 접선과 각 θ를 나타내는 동경이 만나는 점을 $\mathrm{T}(1,\ t)$라고 할 때, $\tan\theta$의 값은 T의 좌표인 t의 값으로 정해진다.
특히, θ가 제2사분면의 각을 나타낼 때에는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 $x<0,\ y>0$이고 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$이므로 $\tan\theta<0$이다.
그러므로 $\tan\theta=t<0$이려면 동경의 연장선과 점 $(1,\ 0)$에서의 단위원의 접선이 만나는 점을 T로 해야 한다.



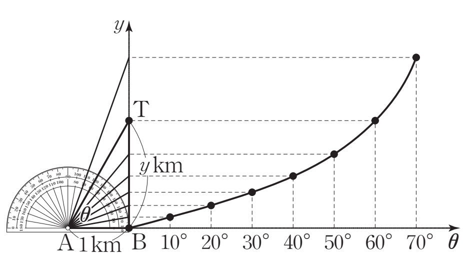
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 회전하는 등대의 불빛이 비추는 지점을 등대의 불빛의 회전각에 대한 함수의 그래프로 나타내어 탄젠트함수의 그래프의 모양을 알도록 하기 위한 것이다.

1.

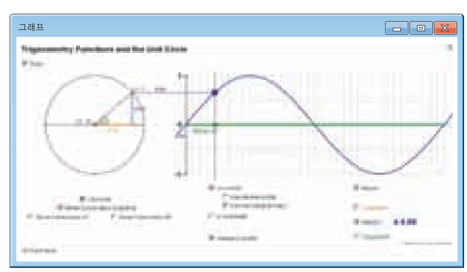


2.



지/도/자/료

공학적 도구를 이용하면 단위원 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 움직임에 따른 θ의 값의 변화, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값의 변화 등을 구체적으로 확인할 수 있을 뿐만 아니라 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$, $y=\tan\theta$가 그려지는 장면을 동적으로 확인할 수 있어, 삼각함수의 그래프를 그리는 원리를 직관적으로 이해시킬 수 있다.



7

목표| 탄젠트함수의 그래프로부터 알 수 있는 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)=-\tan\left(\frac{5}{4}\pi\right)$

$=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=-\tan\frac{\pi}{4}=\mathbf{-1}$

(2) $\tan 240^\circ=\tan(180^\circ+60^\circ)$

$=\tan 60^\circ=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

지/도/자/료 삼각함수와 우함수, 기함수

함수 $f(x)$에서 $f(-x)=f(x)$일 때 $f(x)$는 우함수(짝함수)라 하고, $f(-x)=-f(x)$일 때 $f(x)$는 기함수(홀함수)라고 한다.
우함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, 기함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
따라서 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$이므로 $\sin\theta$는 기함수이고, $\cos(-\theta)=\cos\theta$이므로 우함수이다. 또 $\tan(-\theta)=-\tan\theta$이므로 $\tan\theta$는 기함수이다.

교과서 68 쪽

앞의 그래프에서 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)의 동경 OP는 y축 위에 있다. 이때 점 P의 x좌표는 0이므로 $\tan\theta$의 값은 정의되지 않고, 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)는 모두 $y=\tan\theta$의 그래프의 점근선이다.

● 곡선이 한없이 가까워지는 직선이 있을 때, 이 직선을 곡선의 점근선이라고 한다.

따라서 함수 $y=\tan\theta$의 정의역은 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. 또 함수 $y=\tan\theta$는 정의역의 모든 점에서 연속이다.

한편 $y=\tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고, π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 따라서 임의의 각 θ에 대하여

$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

$\tan(n\pi+\theta)=\tan\theta$ (n은 정수)

가 성립함을 알 수 있다.

따라서 $y=\tan\theta$는 주기가 π인 주기함수이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

탄젠트함수 $y=\tan\theta$의 그래프와 성질

(1) 정의역은 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.
(2) 정의역의 모든 점에서 연속이다.
(3) $y=\tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $\tan(-\theta)=-\tan\theta$이다.
(4) 주기가 π인 주기함수이다. 즉, $\tan(n\pi+\theta)=\tan\theta$ (n은 정수)이다.
(5) 점근선은 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

보기 (1) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$

(2) $\tan\frac{7}{6}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

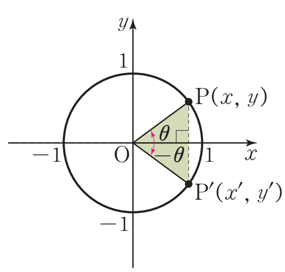
문제 7 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\tan\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$ (2) $\tan 240^\circ$

8

목표| 단위원을 이용하여 각 $-\theta$에 대한 삼각함수의 성질이 성립함을 설명할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 각 θ와 각 $-\theta$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 각각 $P(x, y)$, $P'(x', y')$이라 하면 점 P와 P′은 x축에 대하여 대칭이므로 $x'=x$, $y'=-y$이다. 그런데 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로



(1) $\sin(-\theta)=y'=-y=-\sin\theta$

(2) $\cos(-\theta)=x'=x=\cos\theta$

(3) $\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$

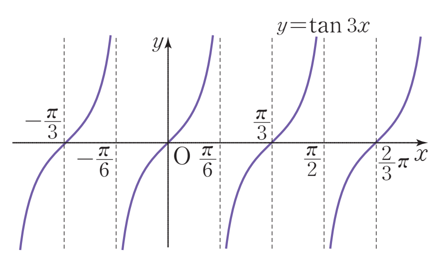
9

목표| 탄젠트함수의 주기를 구하고, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=\tan 3x$라고 하면

$f(x)=\tan(3x+\pi)=\tan 3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

이므로 함수 $y=\tan 3x$의 주기는 $\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$



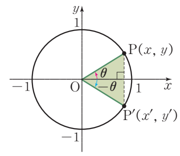
교과서 69 쪽

문제 8 오른쪽 그림과 같은 단위원을 이용하여 다음이 성립함을 확인하여라.

(1) $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

(2) $\cos(-\theta)=\cos\theta$

(3) $\tan(-\theta)=-\tan\theta$



예제 05 함수 $y=\tan 2x$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

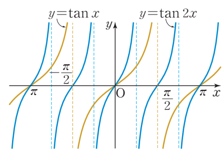
풀이 $f(x)=\tan 2x$라고 하면

$f(x)=\tan 2x=\tan(2x+\pi)$

$=\tan\left\{2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

이므로 함수 $y=\tan 2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

따라서 $y=\tan 2x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



문제 9 다음 함수의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\tan 3x$ (2) $y=\tan(-2x)$

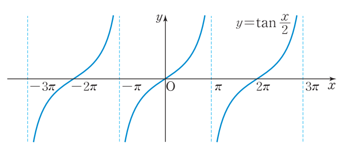
예제 06 함수 $y=\tan\frac{x}{2}$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라. 또 점근선의 방정식을 구하여라.

풀이 $f(x)=\tan\frac{x}{2}$라고 하면

$f(x)=\tan\frac{x}{2}=\tan\left(\frac{x}{2}+\pi\right)=\tan\frac{1}{2}(x+2\pi)=f(x+2\pi)$

이므로 함수 $y=\tan\frac{x}{2}$의 주기는 2π이다.

따라서 $y=\tan\frac{x}{2}$의 그래프는 다음과 같다.



또 점근선의 방정식은 $x=(2n+1)\pi$ (n은 정수)이다.

(2) $\tan(-2x)=-\tan 2x$이므로

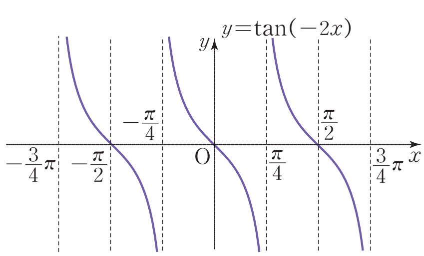
$f(x)=-\tan 2x$라고 하면

$f(x)=-\tan(2x+\pi)=-\tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

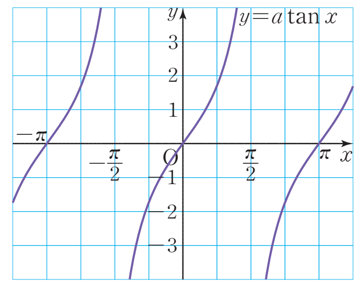
이므로 함수 $f(x)=-\tan 2x$

즉, 함수 $y=\tan(-2x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$



지/도/자/료 여러 가지 탄젠트함수의 그래프

1. $y=a\tan x\,(a>0)$의 그래프



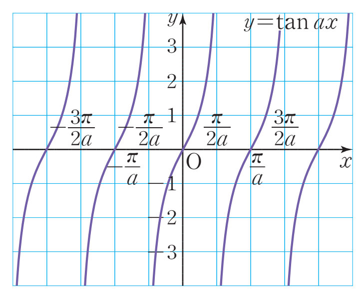
$f(x)=a\tan x$라고 하면

$f(x)=a\tan x=a\tan(x+\pi)=f(x+\pi)$

이므로 함수 $y=a\tan x$의 주기는 π

점근선은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)

2. $y=\tan ax\,(a>0)$의 그래프



$f(x)=\tan ax$라고 하면

$f(x)=\tan ax=\tan(ax+\pi)$

$=\tan a\left(x+\frac{\pi}{a}\right)=f\left(x+\frac{\pi}{a}\right)$

이므로 함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\frac{\pi}{a}$

점근선은 $x=\frac{1}{a}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ (n은 정수)

3. $y=a\tan(bx+c)+d$의 그래프

$y=a\tan b\left(x+\frac{c}{b}\right)+d$이므로 $y=a\tan bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다.

교과서 70 쪽

문제 10 다음 함수의 주기를 구하고, 그래프를 그려라. 또 점근선의 방정식을 구하여라.

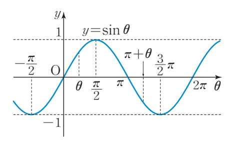
(1) $y=2\tan x$　　(2) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

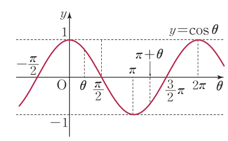
문제 11 함수 $y=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

삼각함수는 어떤 성질이 있는가?

각 $\pi+\theta$에 대한 삼각함수를 알아보자.

다음 그림의 함수 $y=\sin\theta$와 함수 $y=\cos\theta$의 그래프에서 π 간격으로 각 함숫값의 부호가 바뀜을 알 수 있다.





따라서 임의의 각 θ에 대하여

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

이다.

한편 함수 $y=\tan\theta$는 주기가 π인 주기함수이므로 임의의 각 θ에 대하여

$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

θ에 $-\theta$를 대입하면
$\sin(\pi-\theta)$
$=-\sin(-\theta)=\sin\theta$
$\cos(\pi-\theta)$
$=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$
$\tan(\pi-\theta)$
$=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

각 $\pi+\theta$에 대한 삼각함수

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$
$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
$\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

10

목표 | 탄젠트함수의 주기와 점근선의 방정식을 구하고, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

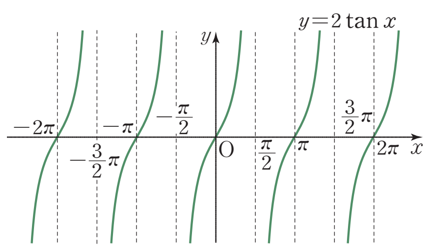
풀이 | (1) $f(x)=2\tan x$라고 하면

$f(x)=2\tan x=2\tan(x+\pi)=f(x+\pi)$

이므로 함수 $y=2\tan x$의 주기는 π

점근선의 방정식은

$\boldsymbol{x=n\pi+\frac{\pi}{2}}$ **(n은 정수)**



(2) $f(x)=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$라고 하면

$f(x)=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}+\pi\right)$

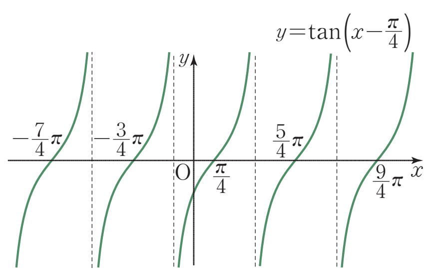
$=\tan\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)=f(x+\pi)$

이므로 함수 $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$의

주기는 π

점근선의 방정식은

$\boldsymbol{x=n\pi+\frac{3}{4}\pi}$ **(n은 정수)**



11

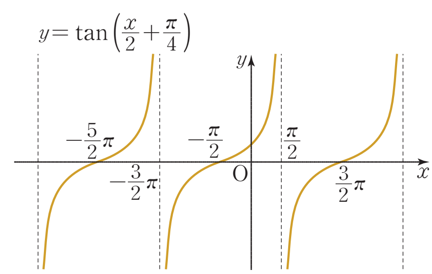
목표 | 탄젠트함수의 주기를 구하고, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이 | $f(x)=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$f(x)=\tan\left\{\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\pi\right\}=\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\pi\right)$

$=\tan\frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{2}\pi\right)=f(x+2\pi)$

이므로 $y=\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$의 주기는 $\boldsymbol{2\pi}$



12

목표 | 각 $\pi+\theta$에 대한 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\sin\frac{4}{3}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\cos(-210^\circ)=\cos 210^\circ=\cos(180^\circ+30^\circ)$

$=-\cos 30^\circ=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) $\tan\frac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

보기 (1) $\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

(2) $\cos\frac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

(3) $\tan\frac{5}{4}\pi=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

문제 12 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

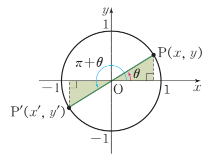
(1) $\sin\frac{4}{3}\pi$ (2) $\cos(-210°)$ (3) $\tan\frac{4}{3}\pi$

문제 13 오른쪽 그림과 같은 단위원을 이용하여 다음이 성립함을 확인하여라.

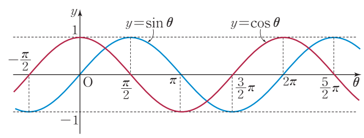
(1) $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

(2) $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

(3) $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$



각 $\frac{\pi}{2}+\theta$에 대한 삼각함수를 알아보자.



위의 그림에서 알 수 있듯이 함수 $y=\sin\theta$의 그래프는 $y=\cos\theta$의 그래프를 θ축의 양의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 임의의 각 θ에 대하여

$$\sin\theta=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),\ \text{즉 } \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$

이다. 이때

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$$

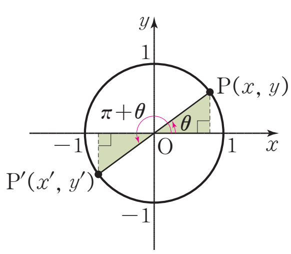
$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}=-\frac{1}{\tan\theta}=-\cot\theta$$

이다.

13

목표| 단위원을 이용하여 각 $\pi+\theta$에 대한 삼각함수의 성질이 성립함을 설명할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 각 θ와 각 $\pi+\theta$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 각각 $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{P}'(x',\ y')$이라고 하면 점 P와 P′은 원점에 대하여 대칭이므로 $x'=-x$, $y'=-y$이다.



그런데 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로

(1) $\sin(\pi+\theta)=y'=-y=\mathbf{-\sin\theta}$

(2) $\cos(\pi+\theta)=x'=-x=\mathbf{-\cos\theta}$

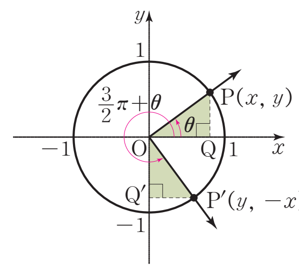
(3) $\tan(\pi+\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\mathbf{\tan\theta}$

지/도/자/료 $\frac{3}{2}\pi\pm\theta$에 대한 삼각함수

다음 그림과 같이 각 θ와 각 $\frac{3}{2}\pi+\theta$를 나타내는 두 동경과 단위원의 교점을 각각 P, P′이라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q, 점 P′에서 y축에 내린 수선의 발을 Q′이라고 하면

$\triangle\mathrm{OPQ}\equiv\triangle\mathrm{OP'Q'}$

이다.



따라서 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라고 하면

$x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이고 $\tan\theta=\frac{y}{x}$이다.

점 P′의 좌표는 $(y,\ -x)$이므로

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-x=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=y=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\frac{x}{y}=-\frac{1}{\tan\theta}=-\cot\theta$$

가 성립한다.

또 위의 등식에 θ 대신 $-\theta$를 대입하면

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\sin\left(\frac{3}{2}\pi+(-\theta)\right)=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+(-\theta)\right)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right)=\tan\left(\frac{3}{2}\pi+(-\theta)\right)=-\frac{1}{\tan(-\theta)}=\frac{1}{\tan\theta}=\cot\theta$$

가 성립한다.

14

목표| 각 $\frac{\pi}{2}+\theta$에 대한 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin 150^\circ=\sin(90^\circ+60^\circ)$

$=\cos 60^\circ=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\frac{2}{3}\pi$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\sin\frac{\pi}{6}=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

(3) $\tan 135^\circ=\tan(90^\circ+45^\circ)$

$=-\cot 45^\circ$

$=-\frac{1}{\tan 45^\circ}=\mathbf{-1}$

교과서 72 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

각 $\frac{\pi}{2}+\theta$에 대한 삼각함수

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$$

θ에 $-\theta$를 대입하면
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$=\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$=-\sin(-\theta)=\sin\theta$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$
$=-\frac{1}{\tan(-\theta)}=\cot\theta$

보기 (1) $\sin\frac{3}{4}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\cos\frac{5}{6}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$

문제 **14** 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

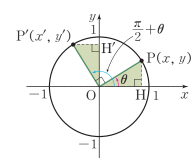
(1) $\sin 150^\circ$ (2) $\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$ (3) $\tan 135^\circ$

문제 **15** 오른쪽 그림과 같은 단위원을 이용하여 다음이 성립함을 확인하여라.

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

(3) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cot\theta$



지금까지 공부한 삼각함수의 그래프와 그 성질을 이용하면 임의의 각에 대한 삼각함수를 0°에서 90° 사이의 각에 대한 삼각함수로 나타낼 수 있다.

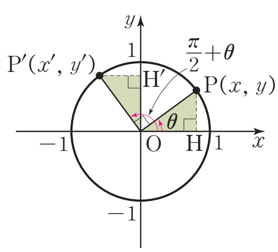
따라서 0°에서 90° 사이의 각에 대한 삼각함수의 값을 알면 임의의 각에 대한 삼각함수의 값을 구할 수 있다. 이 책의 부록에 있는 삼각함수표에는 0°에서 90° 사이의 각에 대한 삼각함수의 값이 나와 있다.

P. 221 삼각함수표

15

목표| 단위원을 이용하여 각 $\frac{\pi}{2}+\theta$에 대한 삼각함수의 성질이 성립함을 설명할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 각 각 θ와 각 $\frac{\pi}{2}+\theta$를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 각각 $P(x, y)$, $P'(x', y')$이라 고 하면



점 P'의 x좌표는 점 P의 y좌표와 절댓값이 서로 같고 부호는 반대이므로 $x'=-y$
또 점 P'의 y좌표는 P의 x좌표와 절댓값이 서로 같고 부호도 같으므로 $y'=x$이다.
그런데 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$이므로

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=y'=x=\mathbf{\cos\theta}$

(2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=x'=-y=\mathbf{-\sin\theta}$

(3) $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{x'}{y'}=-\frac{x}{y}=\mathbf{-\cot\theta}$

16

목표| 삼각함수표와 공학용 계산기를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 삼각함수표를 이용하여 $\sin 160^\circ$의 값을 구하면

$\sin 160^\circ=\sin(180^\circ-20^\circ)$

$=\sin 20^\circ=\mathbf{0.3420}$

공학용 계산기를 이용하여 $\sin 160^\circ$의 값을 구하면

$\sin 160^\circ=342020143325\cdots$

이 값을 소수 다섯째 자리에서 반올림하여 나타내면 $\sin 160^\circ$의 값은 약 **0.3420**이다.

(2) 삼각함수표를 이용하여 $\cos 1004^\circ$의 값을 구하면

$\cos 1004^\circ=\cos(90^\circ\times 11+14^\circ)$

$=\sin 14^\circ=\mathbf{0.2419}$

공학용 계산기를 이용하여 $\cos 1004^\circ$의 값을 구하면

$\cos 1004^\circ=0.241921895599\cdots$

이 값을 소수 다섯째 자리에서 반올림하여 나타내면 $\cos 1004^\circ$의 값은 약 **0.2419**이다.

예제 07 다음 삼각함수의 값을 삼각함수표를 이용하여 구하여라.

(1) $\sin 140^\circ$　　(2) $\tan 335^\circ$

풀이 (1) $\sin 140^\circ=\sin(180^\circ-40^\circ)=\sin 40^\circ$

삼각함수표에서 $\sin 40^\circ=0.6428$이므로

$\sin 140^\circ=0.6428$

(2) $\tan 335^\circ=\tan(360^\circ-25^\circ)=\tan(-25^\circ)$

$=-\tan 25^\circ$

삼각함수표에서 $\tan 25^\circ=0.4663$이므로

$\tan 335^\circ=-0.4663$

각	라디안	sin	…
40°	⋮	0.6428	⋮

각	라디안	…	tan
25°	⋮	⋮	0.4663

답 (1) 0.6428　(2) −0.4663

문제 16 다음 삼각함수의 값을 삼각함수표를 이용하여 구하고, 공학용 계산기를 이용하여 비교하여라.

(1) $\sin 160^\circ$　　(2) $\cos 1004^\circ$　　(3) $\tan(-301^\circ)$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

다음 삼각함수의 값을 구하여 보자.

(1) $\sin^2 0^\circ+\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 89^\circ+\sin^2 90^\circ$

(2) $\tan^2 1^\circ\times\tan^2 2^\circ\times\tan^2 3^\circ\times\cdots\times\tan^2 88^\circ\times\tan^2 89^\circ$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

안산 조위 관측소는 제부도 부근 해안에서 실시간으로 해수면의 높이를 관측하는 장소이다. 이 관측소의 자료를 이용하여 시각 x시에 따른 해수면의 높이 y cm를 다음과 같은 식으로 나타내었을 때, 물음에 답하여라. 〈2013. 6. 27.〉

$$y=395\cos\left(\frac{2\pi}{13}x-\frac{17}{15}\pi\right)+483\ (0\le x<24)$$

(1) 해수면의 높이가 가장 높은 시각과 그때의 해수면의 높이를 구하여라.
(2) 해수면의 높이가 가장 낮은 시각과 그때의 해수면의 높이를 구하여라.
(3) 해수면의 높이의 주기를 구하여라.

---

(3) 삼각함수표를 이용하여 $\tan(-101^\circ)$의 값을 구하면

$\tan(-301^\circ)=\tan(360^\circ\times(-1)+59^\circ)$

$=\tan 59^\circ=\mathbf{1.6643}$

공학용 계산기를 이용하여 $\tan(-301^\circ)$의 값을 구하면

$\tan(-301^\circ)=1.664279482350\cdots$

이 값을 소수 다섯째 자리에서 반올림하여 나타내면 $\tan(-301^\circ)$의 값은 약 **1.6643**이다.

(1), (2), (3)에서 삼각함수표를 이용하여 구한 삼각함수의 값은 공학용 계산기를 이용하여 구한 삼각함수의 값을 소수 다섯째 자리에서 반올림한 값과 같음을 알 수 있다.

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 복잡한 형태의 삼각함수에 대한 식을 간단히 나타내 봄으로써 삼각함수의 성질을 정확하게 이해하고, 이를 적용하는 능력을 기르기 위한 것이다.

풀이| (1) $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$이므로

$\sin^2 0^\circ+\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\cdots+\sin^2 90^\circ$

$=(\sin^2 0^\circ+\sin^2 90^\circ)+(\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ)$

$\quad+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\sin^2 46^\circ)+\sin^2 45^\circ$

$=(\sin^2 0^\circ+\cos^2 0^\circ)+(\sin^2 1^\circ+\cos^2 1^\circ)$

$\quad+\cdots+(\sin^2 44^\circ+\cos^2 44^\circ)+\sin^2 45^\circ$

$=45+\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{91}{2}}$

(2) $\tan(90^\circ-\theta)=\cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$이므로

$\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\tan 3^\circ\times\cdots\times\tan 89^\circ$

$=\tan 1^\circ\times\tan 2^\circ\times\cdots\times\tan 45^\circ$

$\quad\times\dfrac{1}{\tan 44^\circ}\times\cdots\times\dfrac{1}{\tan 2^\circ}\times\dfrac{1}{\tan 1^\circ}$

$=\tan 45^\circ=\mathbf{1}$

단원 과제

목표| 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 해수면의 최대, 최소 높이와 그때의 시각을 구해 봄으로써 삼각함수를 실생활 문제를 해결하는 데 활용할 수 있게 한다.

풀이| $y=395\cos\left(\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi\right)+483\ (0\le x<24)$ ……①

(1) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi\right)=1$

(i) $\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi=0$일 때 $x=7\dfrac{11}{30}$(시)

(ii) $\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi=2\pi$일 때 $x=20\dfrac{11}{30}$(시)

따라서 **7시 22분**과 **20시 22분**에 해수면의 높이는 $359+483=$**878(cm)**로 가장 높다.

(2) $\cos\left(\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi\right)=-1$

(i) $\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi=-\pi$일 때 $x=\dfrac{13}{15}$(시)

(ii) $\dfrac{2\pi}{13}x-\dfrac{17}{15}\pi=\pi$일 때 $x=13\dfrac{13}{15}$(시)

따라서 **0시 52분**과 **13시 52분**에 해수면의 높이는 $-395+483=$**88(cm)**로 가장 낮다.

(3) 주기: **13시간**

04 삼각함수의 활용

소단원 지도 목표

① 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 삼각함수의 활용에서는 주어진 구간 안에서 해를 구하는 간단한 방정식과 부등식을 다룬다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 야구공이 날아간 거리를 지면과 야구공이 날아가는 방향이 이루는 각에 대한 삼각함수로 나타내고, 최대가 되는 각도를 구하는 식을 세워 봄으로써 삼각함수를 포함하는 방정식의 해의 의미를 이해하기 위한 것이다.

1. 야구공이 날아간 거리는 약 $\left(\frac{v^2}{10}\sin 2x\right)$ m이므로 이 값이 최대가 되려면 $\sin 2x$의 값이 최대가 되어야 한다. 그런데 사인함수의 최댓값은 1이므로 $\sin 2x$의 값은 **1**이다.

2. $\boldsymbol{\sin 2x=1}$

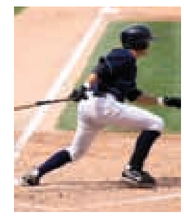
교과서 74 쪽

04 삼각함수의 활용

● 삼각함수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.

삼각함수는 방정식과 부등식에 어떻게 활용되는가?

탐구 활동 타자가 친 야구공의 처음 속력이 v m/s이고, 처음 지면과의 각도가 x라디안일 때, 야구공이 날아간 거리는 약 $\frac{v^2}{10}\sin 2x$ m라고 한다. 다음 물음에 답하여 보자. (단, 야구공은 바닥에서 출발하고, 공기 저항은 없다고 가정한다.)



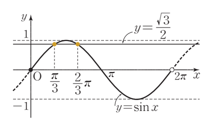
1. 야구공이 날아간 거리가 최대가 되는 $\sin 2x$의 값은 얼마인가?
2. 야구공이 날아간 거리가 최대가 되는 각도 x의 값을 구하는 식을 세워 보자.

탐구 활동에서의 식 $\sin 2x=1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함하는 방정식의 해는 삼각함수의 그래프나 단위원을 이용하여 구할 수 있다.

예제 01 방정식 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$을 풀어라. (단, $0\le x<2\pi$)

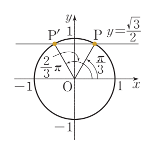
풀이 ❶ 그래프를 이용하는 방법

다음 그림과 같이 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점의 x좌표가 구하는 해이다.



❷ 단위원을 이용하는 방법

다음 그림과 같이 단위원과 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 교점 P, P′에 대하여 동경 OP, OP′이 나타내는 각의 크기가 구하는 해이다.



답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

1

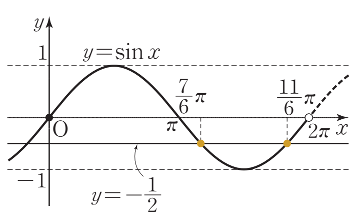
목표 | 그래프 또는 단위원을 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이 | (1) 방정식 $\sin x=-\frac{1}{2}$의 해는 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=-\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표이다.

오른쪽 그림에서 교점의 x좌표는

$x=\frac{7}{6}\pi$ 또는

$x=\frac{11}{6}\pi$



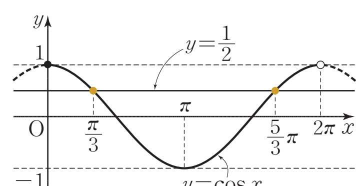
따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{x=\frac{7}{6}\pi}$ 또는 $\boldsymbol{x=\frac{11}{6}\pi}$

(2) 방정식 $\cos x=\frac{1}{2}$의 해는 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표이다.

오른쪽 그림에서 교점의 x좌표는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

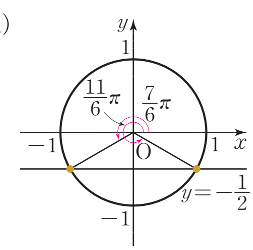


따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}$ 또는 $\boldsymbol{x=\frac{5}{3}\pi}$

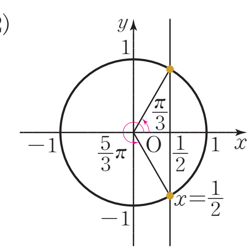
다른 풀이

(1)



$\boldsymbol{x=\frac{7}{6}\pi}$ 또는 $\boldsymbol{x=\frac{11}{6}\pi}$

(2)



$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}$ 또는 $\boldsymbol{x=\frac{5}{3}\pi}$

교과서 75 쪽

문제 1 다음 방정식을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

(1) $\sin x = -\frac{1}{2}$ (2) $\cos x = \frac{1}{2}$

문제 2 다음 방정식을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

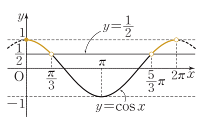
(1) $\tan x - \sqrt{3} = 0$ (2) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

$\sin x < \frac{1}{2}$ 과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함하는 부등식은 방정식의 경우와 마찬가지로 삼각함수의 그래프나 단위원을 이용하여 구할 수 있다.

예제 02 부등식 $\cos x > \frac{1}{2}$ 을 풀어라. (단, $0 \le x < 2\pi$)

풀이 ❶ 그래프를 이용하는 방법

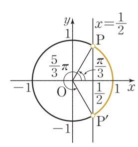
다음 그림과 같이 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 해는 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 윗부분에 있는 x값의 범위이다.

❷ 단위원을 이용하는 방법

다음 그림과 같이 단위원과 직선 $x=\frac{1}{2}$의 교점 P, P′에 대하여 동경 OP, OP′이 나타내는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$이다.



따라서 구하는 해는 (교점의 x좌표)$>\frac{1}{2}$인 동경이 나타내는 x값의 범위이다.

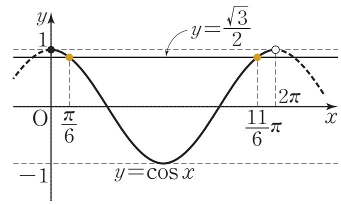
답 $0 \le x < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

(2) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$에서

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 방정식의 해는

$y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$의

교점의 x좌표이다.



위의 그림에서 교점의 x좌표는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{11}{6}\pi$

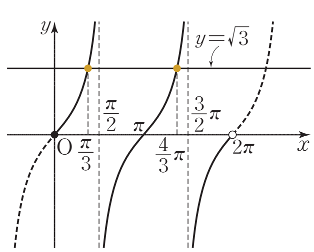
따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{6}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{11}{6}\pi}$

2

목표| 그래프 또는 단위원을 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식을 풀 수 있게 한다.

풀이| (1) $\tan x - \sqrt{3} = 0$에서 $\tan x = \sqrt{3}$이므로 방정식의 해는 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$의 교점의 x좌표이다.



위의 그림에서 교점의 x좌표는 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

따라서 구하는 해는

$\boldsymbol{x=\frac{\pi}{3}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{4}{3}\pi}$

지/도/자/료

① 삼각함수를 포함하는 부등식의 해를 그래프를 이용하여 구하기

$f(x)>k$이면 삼각함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽에 있는 x값의 범위가 이 부등식의 해이다.

$f(x)<k$이면 삼각함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$보다 아래쪽에 있는 x값의 범위가 이 부등식의 해이다.

② 삼각함수를 포함하는 부등식의 해를 단위원을 이용하여 구하기

예제 **02**에서 단위원 $a^2+b^2=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, b)$는 동경 OP의 각 x에 대하여 $\mathrm{P}(\cos x, \sin x)$, 즉 $a=\cos x$, $b=\sin x$이다. 따라서 $\cos x > \frac{1}{2}$의 해는 직선 $a=\frac{1}{2}$보다 오른쪽에 있는 점 $\mathrm{P}(a, b)$의 각 x이다.

교과서 76 쪽

문제 3 다음 부등식을 풀어라. (단, $0\le x<2\pi$)

(1) $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos x<-\frac{1}{2}$

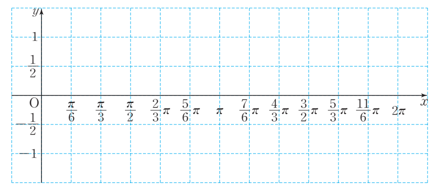
문제 4 다음 부등식을 풀어라. (단, $0\le x<2\pi$)

(1) $2\sin x<\sqrt{2}$　　(2) $\sqrt{3}\tan x-1>0$

발전

문제 5 부등식 $\sin x<\cos x$에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, $0\le x<2\pi$)

(1) 주어진 x값의 범위에서 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프를 그려라.



(2) 두 그래프의 교점을 찾고, 교점의 x좌표를 구하여라.

(3) 그래프에서 $\sin x<\cos x$를 만족시키는 x값의 범위를 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▸문제 해결

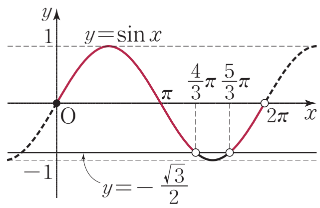
다음 부등식을 풀어라. (단, $0\le x<2\pi$)

$$2\cos^2 x+(2-\sqrt{2})\cos x-\sqrt{2}\le 0$$

3

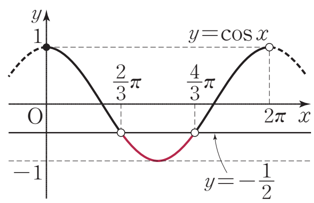
목표| 그래프 또는 단위원을 이용하여 삼각함수를 포함하는 부등식의 해를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1)



$0\le x<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$

(2)

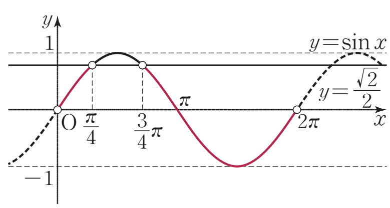


$\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$

4

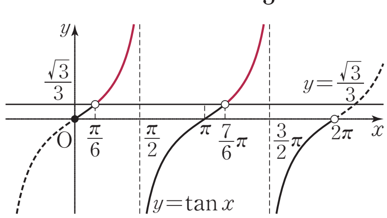
목표| 그래프 또는 단위원을 이용하여 삼각함수를 포함하는 부등식의 해를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2\sin x<\sqrt{2}$에서　$\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$



$0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}\pi<x<2\pi$

(2) $\sqrt{3}\tan x-1>0$에서　$\tan x>\frac{\sqrt{3}}{3}$

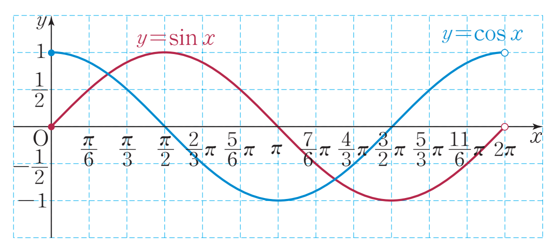


$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

5

목표| 그래프를 이용하여 부등식의 해를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1)



(2) $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5}{4}\pi$　　(3) $0\le x<\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi<x<2\pi$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 삼각함수가 포함된 복잡한 형태의 부등식을 치환을 이용하여 풀 수 있게 하기 위한 문제이다.

풀이| $2\cos^2 x+(2-\sqrt{2})\cos x-\sqrt{2}\le 0$　$(0\le x<2\pi)$

$\cos x=t$ $(-1\le t\le 1)$라고 하면

$2t^2+(2-\sqrt{2})t-\sqrt{2}\le 0$, $-1\le t\le\frac{\sqrt{2}}{2}$　$(0\le x<2\pi)$

따라서　$\frac{\pi}{4}<x<\frac{7}{4}\pi$

교과서 77 쪽

[해답 p.204]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음에서 육십분법은 호도법으로, 호도법은 육십분법으로 나타내어라.

(1) 45° (2) -420° (3) $\frac{3}{4}\pi$ (4) $-\frac{4}{3}\pi$

01 일반각과 호도법

2 반지름의 길이가 6, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하여라.

01 일반각과 호도법
부채꼴의 호의 길이와 넓이

3 각 θ의 동경이 다음 점을 지날 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

(1) $(3,\ 4)$ (2) $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(3) $(-2,\ -1)$ (4) $(1,\ -1)$

02 삼각함수
삼각함수의 정의

4 다음 함수의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

(1) $y=\sin(-2x)$ (2) $y=\cos 4x$ (3) $y=\tan\frac{x}{3}$

03 삼각함수의 그래프와 성질

5 다음 방정식과 부등식을 풀어라. (단, $0\le x<2\pi$)

(1) $\sin x=\frac{1}{2}$ (2) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\tan x=-1$

(4) $\sin x>-\frac{1}{2}$ (5) $\cos x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$ (6) $\tan x>1$

04 삼각함수의 활용
방정식과 부등식

중/단/원 기초

1

목표| 육십분법과 호도법 사이의 관계를 이해하게 한다.

풀이| (1) $45^\circ=45\times\frac{\pi}{180}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

(2) $-420^\circ=(-420)\times\frac{\pi}{180}=\boldsymbol{-\frac{7}{3}\pi}$

(3) $\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{4}\times180^\circ=\boldsymbol{135^\circ}$

(4) $-\frac{4}{3}\pi=-\frac{4}{3}\times180^\circ=\boldsymbol{-240^\circ}$

2

목표| 호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 주어진 부채꼴의 호의 길이는 $6\times\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{4\pi}$

주어진 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{2}{3}\pi=\boldsymbol{12\pi}$

3

목표| 동경 위의 한 점의 좌표가 주어진 일반각에 대한 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$, $\tan\theta=\frac{4}{3}$

(2) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, $\tan\theta=-\sqrt{3}$

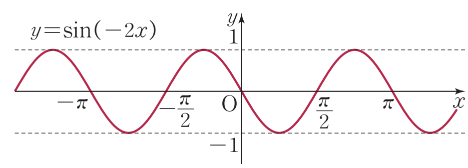
(3) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\tan\theta=\frac{1}{2}$

(4) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=-1$

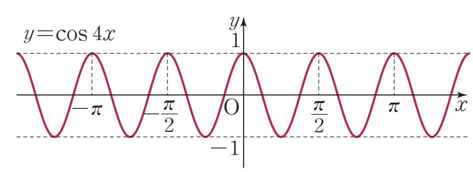
4

목표| 삼각함수의 주기를 구하고, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

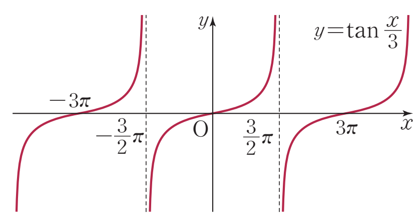
풀이| (1) 주기: $\boldsymbol{\pi}$



(2) 주기: $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$



(3) 주기: $\boldsymbol{3\pi}$



5

목표| 단위원 또는 그래프를 이용하여 삼각함수가 포함된 방정식 또는 부등식의 해를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{6}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{5}{6}\pi}$

(2) $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{4}}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{7}{4}\pi}$ (3) $\boldsymbol{x=\frac{3}{4}\pi}$ **또는** $\boldsymbol{x=\frac{7}{4}\pi}$

(4) $\boldsymbol{0\le x<\frac{7}{6}\pi}$ **또는** $\boldsymbol{\frac{11}{6}\pi<x<2\pi}$

(5) $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{7}{4}\pi}$

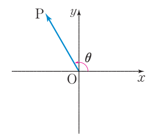
(6) $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}}$ **또는** $\boldsymbol{\frac{5}{4}\pi<x<\frac{3}{2}\pi}$

중단원 기본

[해답 p.205]

수준별 학습

1 오른쪽 그림에서 각 θ의 동경과 4θ의 동경이 일치할 때, θ의 크기를 구하여라. (단, $0<\theta<\pi$)



01 일반각과 호도법

2 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라. $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$

02 삼각함수
삼각함수 사이의 관계

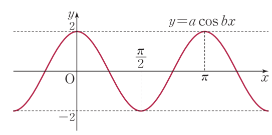
3 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\sin(\pi+\theta)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$

(2) $\sin^2\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin^2(\pi+\theta)+\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$

03 삼각함수의 그래프와 성질

4 오른쪽 그림은 $y=a\cos bx$의 그래프를 나타낸 것이다. 상수 a, b의 값을 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$)

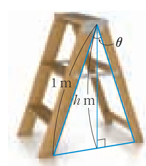


03 삼각함수의 그래프와 성질

5 함수 $y=\tan\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)$의 주기를 구하고, 그래프를 그려라.

03 삼각함수의 그래프와 성질

6 오른쪽 그림은 길이가 1 m인 사다리를 이등변삼각형 모양으로 펼친 것이다. 이 사다리의 높이 h m가 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le h\le\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, 펼쳐진 사다리가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, θ의 범위를 구하여라.



04 삼각함수의 활용
부등식

중/단/원 기본

1

목표| 동경이 일치하는 일반각에 대한 조건을 구할 수 있게 한다.

풀이| $4\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수)이고,

$0<\theta<\pi$이므로　$\theta=\frac{2}{3}\pi$

2

목표| 삼각함수 사이의 관계를 활용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로

(1) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$에서

$1+2\sin\theta\cos\theta=2$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

(2) $\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=2$

3

목표| 삼각함수의 성질을 이용하여 식을 간단히 할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin(\pi+\theta)+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$

$=-\sin\theta+\sin\theta=0$

(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$,

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$

$\sin^2\theta+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin^2(\pi+\theta)+\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$

$=\sin^2\theta+\cos^2\theta+(-\sin\theta)^2+(-\cos\theta)^2=2$

4

목표| $y=a\cos bx$ 꼴의 그래프의 성질을 이용하여 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수의 그래프의 최댓값과 최솟값이 각각 2, -2이므로 $a=\pm2$이고, 주기가 π이므로 $b=\pm2$이다.

$a>0$, $b>0$이므로　$a=2$, $b=2$

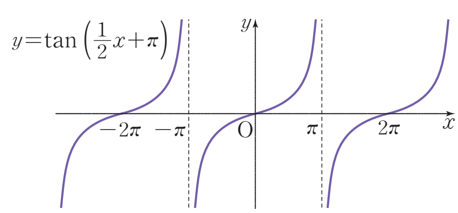
5

목표| 탄젠트함수의 주기를 구하고, 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\tan\frac{1}{2}(x+2\pi)$라고 하면

$f(x)=\tan\left\{\frac{1}{2}(x+2\pi)+\pi\right\}=\tan\frac{1}{2}(x+4\pi)=f(x+2\pi)$

따라서 $y=\tan\left(\frac{1}{2}x+\pi\right)$의 주기: 2π



6

목표| 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $h=\cos\frac{\theta}{2}$이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le\cos\frac{\theta}{2}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

θ가 예각이므로　$\frac{\pi}{6}\le\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

중단원 실력

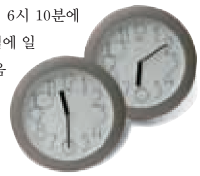
[해답 p.205]

수준별 학습

1 용찬이는 밤 11시 30분에 잠이 들어서 아침 6시 10분에 일어났다. 용찬이가 잠자리에 든 후부터 아침에 일어날 때까지 움직인 시곗바늘에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 시계의 긴바늘이 회전한 각의 크기를 육십분법으로 구하여라.

(2) 시계의 짧은바늘이 회전한 각의 크기를 호도법으로 구하여라.



01 일반각과 호도법

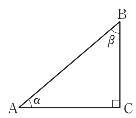
2 x에 대한 이차방정식 $x^2-ax-a^2=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, 상수 a의 값을 모두 구하여라.

02 삼각함수

3 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형에서 직각이 아닌 두 각의 크기를 각각 α, β라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

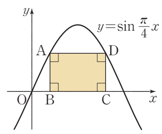
(1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$의 값을 구하여라.

(2) $\sin(\alpha-\beta)$를 2α에 대한 삼각함수로 나타내어라.



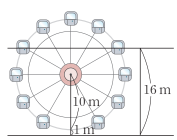
03 삼각함수의 그래프와 성질

4 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\sin\frac{\pi}{4}x$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형에 직사각형 ABCD가 내접하고 있다. $\overline{BC}=2$일 때, 직사각형 ABCD의 넓이를 구하여라.



03 삼각함수의 그래프와 성질

5 반지름의 길이가 10 m인 원형의 놀이 기구가 지상에서 11 m인 곳에 있는 원의 중심을 기준으로 하여 3분에 한 바퀴씩 일정한 속력으로 돌고 있다. 동희가 놀이 기구를 타고 한 바퀴 돌 때, 탑승한 칸이 지상에서 16 m 이상인 곳에 있는 동안의 시간을 구하여라.
(단, 탑승한 칸은 반지름의 길이가 10 m인 원주 위의 한 점이라고 생각한다.)



04 삼각함수의 활용
부등식

중/단/원 실력

1

목표| 조건에 맞는 일반각을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $360^\circ\times6+30^\circ\times8=\mathbf{2400^\circ}$

(2) $30^\circ\times6+0.5^\circ\times40=200^\circ=\mathbf{\frac{10}{9}\pi}$

2

목표| 삼각함수 사이의 관계를 활용할 수 있게 한다.

풀이| 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=a$에서 $1+2\sin\theta\cos\theta=a^2$ ……①

$\sin\theta\cos\theta=-a^2$ ……②

①, ②를 연립하여 풀면 $\mathbf{a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}}$

3

목표| 삼각함수의 성질을 활용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$

$=\sin^2\alpha+\sin^2(90^\circ-\alpha)$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\mathbf{1}$

(2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\{\alpha-(90^\circ-\alpha)\}$

$=\sin(2\alpha-90^\circ)$

$=-\sin(90^\circ-2\alpha)$

$=-\cos(-2\alpha)$

$=\mathbf{-\cos 2\alpha}$

4

목표| 삼각함수의 그래프를 활용할 수 있게 한다.

풀이| $y=\sin\frac{\pi}{4}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}}=8$이므로

$y=\sin\frac{\pi}{4}x$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표 중에서 양의 최솟값은 4이다.

또 $\overline{BC}=2$이므로 두 점 B, C의 좌표를 각각 $(b,\ 0)$, $(b+2,\ 0)$으로 놓으면 $b=1$

따라서 B$(1,\ 0)$, C$(3,\ 0)$이므로 A$\left(1,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

직사각형 ABCD의 넓이는 $2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{\sqrt{2}}$

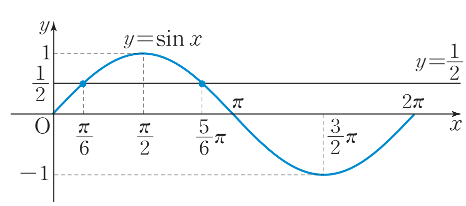
5

목표| 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 탑승한 칸과 원의 중심을 이은 반지름이 지면과 평행한 시각을 기준으로 시각 t에서 탑승한 칸의 높이 y m는 $y=10\sin\frac{2}{3}\pi t+11$

$10\sin\frac{2}{3}\pi t+11\geq16\ (0\leq t\leq3)$에서 $\sin\frac{2}{3}\pi t\geq\frac{1}{2}$

이때 $\frac{2}{3}\pi t=x$로 놓으면 $0\leq x\leq2\pi$이고 $y=\sin x$와 $y=\frac{1}{2}$의 그래프는 다음과 같다.



$\sin x\geq\frac{1}{2}$의 해는 $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{5}{6}\pi$이므로 $\frac{\pi}{6}\leq\frac{2}{3}\pi t\leq\frac{5}{6}\pi$

따라서 $\frac{1}{4}\leq t\leq\frac{5}{4}$이므로 탑승한 칸이 지상에서 16 m 이상인 곳에 **1분 동안** 있게 된다.

2 삼각함수의 미분

중단원을 시작하며

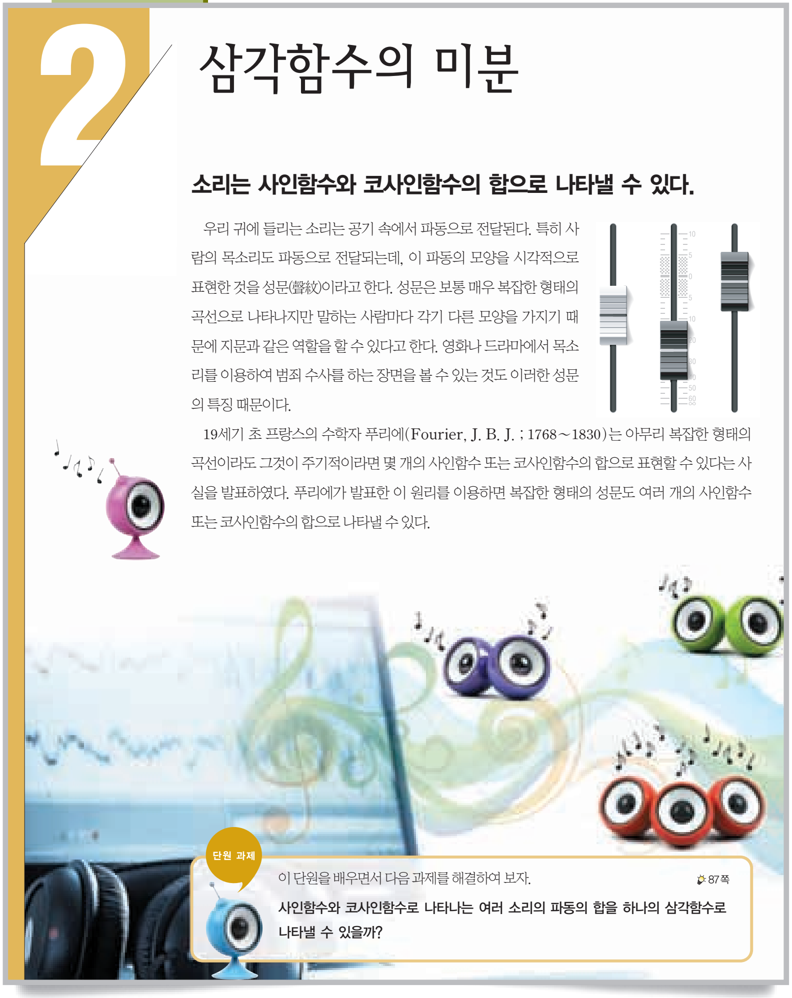
이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 삼각함수의 덧셈정리를 이해하게 한다.
② 삼각함수의 극한을 구할 수 있게 한다.
③ 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 삼각함수의 덧셈정리	삼각함수의 덧셈정리
	삼각함수의 합성
02 삼각함수의 극한	삼각함수의 극한
	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$ 의 값
03 사인함수와 코사인함수의 미분	사인함수와 코사인함수의 도함수
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 80 쪽


2 삼각함수의 미분

소리는 사인함수와 코사인함수의 합으로 나타낼 수 있다.

우리 귀에 들리는 소리는 공기 속에서 파동으로 전달된다. 특히 사람의 목소리도 파동으로 전달되는데, 이 파동의 모양을 시각적으로 표현한 것을 성문(聲紋)이라고 한다. 성문은 보통 매우 복잡한 형태의 곡선으로 나타나지만 말하는 사람마다 각기 다른 모양을 가지기 때문에 지문과 같은 역할을 할 수 있다고 한다. 영화나 드라마에서 목소리를 이용하여 범죄 수사를 하는 장면을 볼 수 있는 것도 이러한 성문의 특징 때문이다.

19세기 초 프랑스의 수학자 푸리에(Fourier, J. B. J. ; 1768~1830)는 아무리 복잡한 형태의 곡선이라도 그것이 주기적이라면 몇 개의 사인함수 또는 코사인함수의 합으로 표현할 수 있다는 사실을 발표하였다. 푸리에가 발표한 이 원리를 이용하면 복잡한 형태의 성문도 여러 개의 사인함수 또는 코사인함수의 합으로 나타낼 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 87 쪽

사인함수와 코사인함수로 나타나는 여러 소리의 파동의 합을 하나의 삼각함수로 나타낼 수 있을까?

들어가면서 주기적으로 발생하는 현상을 함수로 표현할 때, 삼각함수로 구성되는 급수로 나타내는 방법을 푸리에 급수라고 하는데, 아무리 복잡한 형태의 현상도 간단한 삼각함수의 덧셈으로 표현할 수 있다. 따라서 주기적 자연 현상을 관찰, 해석하고 새로운 사실을 탐구하기 위해서는 삼각함수의 덧셈이 필수적이다. 이 단원에서는 삼각함수의 덧셈정리, 삼각함수의 극한 등의 개념을 지도하고 이를 이용하여 사인함수와 코사인함수의 도함수를 구할 수 있도록 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.	상	삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기 등의 문제를 해결할 수 있다.
	중	삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있다.
	하	삼각함수의 덧셈정리를 말할 수 있다.
2. 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.	상	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}=1$을 이용하여 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
	중	$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1-\sin x}$와 같이 식의 변형 없이 극한을 구할 수 있는 간단한 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
	하	그래프를 보고 간단한 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.
3. 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.	상	사인함수와 코사인함수를 미분하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 이용하여 삼각함수를 미분할 수 있다.
	하	$y=\sin x$와 $y=\cos x$를 미분할 수 있다.

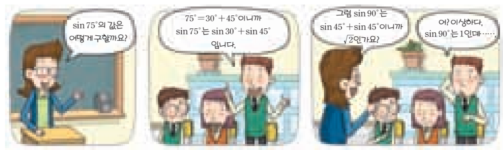
교과서 81 쪽

01 삼각함수의 덧셈정리

● 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

삼각함수의 덧셈정리란 무엇인가?

생각 열기



탐구 활동 다음 삼각함수표의 값을 이용하여 물음에 답하여 보자.

1. $\sin 50^\circ \cos 20^\circ + \cos 50^\circ \sin 20^\circ$의 값을 구하여 보자.
2. **1**의 결과와 $\sin 70^\circ$의 값을 비교하여 보자.

각(θ)	20°	50°	70°
$\sin\theta$	0.3420	0.7660	0.9397
$\cos\theta$	0.9397	0.6428	0.3420

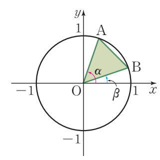
두 각 α, β의 삼각함수를 이용하여 각 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$의 삼각함수를 나타내는 방법을 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 두 각 α, β를 나타내는 동경과 단위원의 교점을 각각 A, B라고 하면

$$A(\cos\alpha, \sin\alpha),\ B(\cos\beta, \sin\beta)$$

이고, 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{AB}^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$



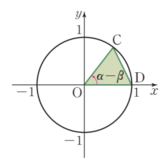
수학 I 평면좌표
좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 사이의 거리는 $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 이다.

이다. 한편 원점 O를 중심으로 △OAB를 $-\beta$만큼 회전하면 점 B는 점 D(1, 0)으로 이동하고, 점 A는 점 C로 이동하며 그 좌표는 $C(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta))$와 같다.

따라서 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$$\overline{CD}^2=\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha-\beta)$$
$$=2-2\cos(\alpha-\beta)$$

이다.



01 삼각함수의 덧셈정리

소단원 지도 목표

① 삼각함수의 덧셈정리를 이해하고, 이를 활용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.
② 두 삼각함수의 합성을 이해하고, 이를 활용하여 삼각함수의 최댓값, 최솟값, 주기를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. $\sin(\alpha+\beta)$와 $\sin\alpha+\sin\beta$를 혼동하지 않도록 지도한다.
2. 구체적인 예를 통하여 삼각함수의 덧셈정리를 이해하도록 한 후 공식을 일반화시킨다.
3. 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 30°, 45°, 60°, 90° 등과 같은 특수각이 아닌 각에 대한 삼각함수의 값을 구할 수 있음을 알게 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 덧셈정리(addition theorem)

생각 열기 참/고/자/료

일차함수 $f(x)=ax$에 대하여 x_1, x_2가 임의의 정의역의 원소일 때
$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
가 성립한다. 그러나 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수 등과 같은 삼각함수는
$\sin(50^\circ+20^\circ)=\sin 50^\circ+\sin 20^\circ$
와 같은 등식이 성립하지 않는다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 삼각함수표를 이용하여 합으로 나타난 각에 대한 삼각함수의 값을 구하여 봄으로써 사인함수의 덧셈정리를 예측해 보기 위한 것이다.

1. $\sin 50^\circ \cos 20^\circ+\cos 50^\circ \sin 20^\circ$
$=0.7660\times0.9397+0.6428\times0.3420$
$=0.9396478$
이므로 $\sin 50^\circ \cos 20^\circ+\cos 50^\circ \sin 20^\circ$의 값은 약 **0.9396**이다.

2. $\sin 70^\circ=0.9397$이므로 $\sin 70^\circ$의 값은 $\sin 50^\circ \cos 20^\circ+\cos 50^\circ \sin 20^\circ$의 값과 **같다.**

주의| 위 식의 계산 결과에서 약간의 오차가 발생한다. 그 이유는 삼각함수표에 나와 있는 삼각함수의 값은 소숫점 아래 다섯째 자리에서 반올림한 값이기 때문에 실제의 값과 오차가 발생하고, 그 값을 연산하는 과정에서 또다시 오차가 발생하기 때문이다. 이러한 오차를 이해하지 못하는 경우에는 공학용 계산기를 이용하여 충분한 자릿수로 삼각함수의 값을 표현하여 그 결과를 확인해 보도록 한다.

본문 해설

❶ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\left\{\dfrac{\pi}{2}+(-\alpha)\right\}$

$=-\sin(-\alpha)=\sin\alpha$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\left\{\dfrac{\pi}{2}+(-\alpha)\right\}$

$=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

❷ $\cos(-\beta)=\cos\beta$

$\sin(-\beta)=-\sin\beta$

❸ 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리를 이용하려면 이미 알고 있는 특수각의 합 또는 차의 꼴로 바꾸어 생각한다.

예를 들면,

$15^\circ=45^\circ-30^\circ$

$75^\circ=45^\circ+30^\circ$

$105^\circ=60^\circ+45^\circ$

교과서 82 쪽

이때 $\overline{AB}^2=\overline{CD}^2$이므로

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$

이고, 이 식을 정리하면 다음이 성립한다.

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ①$$

또한 ①은 임의의 각 α, β에 대하여 성립하므로 β 대신에 $-\beta$를 대입하면

$\sin(-\beta)=-\sin\beta$
$\cos(-\beta)=\cos\beta$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

가 성립한다.

한편 $\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$이므로

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}$$
$$=\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right\}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$$

❶ $$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

이고, 이 식을 정리하면 다음이 성립한다.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$

또한 ②에서 β 대신에 $-\beta$를 대입하여 정리하면

❷ $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같고, 이를 사인함수와 코사인함수의 **덧셈정리**라고 한다.

❸ **사인함수와 코사인함수의 덧셈정리**

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

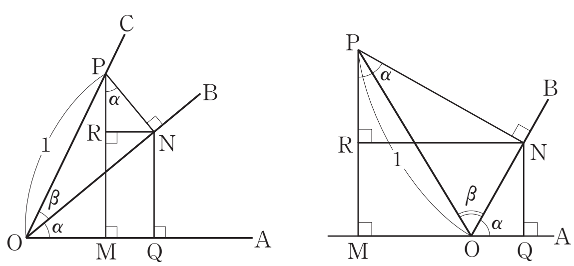
(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

보기 $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

지/도/자/료

1. α, β가 모두 양의 예각이고 $\alpha+\beta$가 예각인 경우와 둔각인 경우로 나누어 증명할 수 있다.



위 그림에서 $\alpha+\beta$가 예각인 경우 $\overline{OP}=1$이 되도록 점 P를 잡고, 점 P에서 $\overrightarrow{OA}$에 내린 수선의 발을 M이라고 하면

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\overline{PM}$ $\cdots\cdots$①

점 P에서 OB에 내린 수선의 발을 N, 점 N에서 $\overrightarrow{OA}$, $\overline{PM}$에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 하면

$\sin(\alpha+\beta)=\overline{PM}=\overline{MR}+\overline{RP}$

$=\overline{QN}+\overline{RP}$ $\cdots\cdots$②

그런데 $\angle RPN=\angle QON=\alpha$이므로

$\overline{QN}=\overline{ON}\cdot\sin\alpha=\sin\alpha\cos\beta$ $\cdots\cdots$③

$\overline{RP}=\overline{NP}\cdot\cos\alpha=\cos\alpha\sin\beta$ $\cdots\cdots$④

①, ②, ③, ④에서

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\overline{OM}=\overline{OQ}-\overline{MQ}$

$=\overline{OQ}-\overline{RN}$ $\cdots\cdots$⑤

$\overline{OQ}=\overline{ON}\cdot\cos\alpha=\cos\alpha\cos\beta$ $\cdots\cdots$⑥

$\overline{RN}=\overline{PN}\cdot\sin\alpha=\sin\alpha\sin\beta$ $\cdots\cdots$⑦

⑤, ⑥, ⑦에서

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\alpha+\beta$가 둔각인 경우는

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}$

$=\overline{PM}=\overline{PR}+\overline{RM}=\overline{PR}+\overline{NQ}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\{\pi-(\alpha+\beta)\}$

$=\overline{OM}=\overline{MQ}-\overline{OQ}=\overline{RN}-\overline{OQ}$

으로부터 위와 같은 방법으로 증명할 수 있다.

교과서 83 쪽

문제 1 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin 15^\circ$　(2) $\cos 105^\circ$　(3) $\cos 15^\circ$

한편 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리를 이용하면 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

이 식에서 분자, 분모를 $\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta\neq0)$로 나누어 정리하면

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

이다. 즉, 다음이 성립한다.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad\cdots\cdots ③$$

❶ 또한 ③에서 β 대신에 $-\beta$를 대입하여 정리하면

$\tan(-\beta)=-\tan\beta$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같고, 이를 탄젠트함수의 **덧셈정리**라고 한다.

❷ **탄젠트함수의 덧셈정리**

(1) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

(2) $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

보기 $\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$$

문제 2 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\tan 75^\circ$　(2) $\tan 105^\circ$

본문 해설

❶ $\tan(\alpha-\beta)$에 대한 등식은 다음과 같이 증명할 수도 있다.

$\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

❷ 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 덧셈정리를 통틀어 삼각함수의 덧셈정리라고 한다.

1

목표| 사인함수와 코사인함수의 덧셈정리를 이용하여 사인함수와 코사인함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

(2) $\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)$

$$=\cos 60^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$$

(3) $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

2

목표| 탄젠트함수의 덧셈정리를 이용하여 탄젠트함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)$

$$=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\mathbf{2+\sqrt{3}}$$

(2) $\tan 105^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)$

$$=\frac{\tan 60^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ\tan 45^\circ}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times1}$$

$$=\mathbf{-2-\sqrt{3}}$$

3

목표| 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$에서

$\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

따라서 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan\beta=-2\sqrt{2}$

(1) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\mathbf{\frac{-1-2\sqrt{6}}{6}}$$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\mathbf{\frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{6}}$$

(3) $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-(-2\sqrt{2})}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2\sqrt{2})}=\mathbf{\frac{-9\sqrt{3}-8\sqrt{2}}{5}}$$

본문 해설

❶ 일반적으로 기울기가 각각 m, m'인 두 직선 l, l'이 이루는 각의 크기 θ는 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

두 직선 l과 l'이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α, β라고 하면

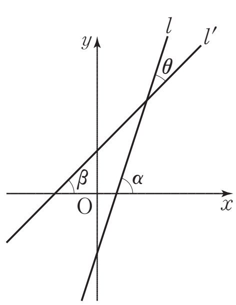
$\beta+\theta=\alpha$, $\tan\alpha=m$,

$\tan\beta=m'$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|$$



이때 $mm'=-1$이면 $\theta=90^\circ$이다.

교과서 84 쪽

예제 01 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이고 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$일 때, $\sin(\alpha+\beta)$의 값을 구하여라.

풀이 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\alpha>0$, $\sin\beta>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

따라서

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$$

답 $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$

문제 3 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$이고 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\beta=-\frac{1}{3}$일 때, 다음 삼각함수의 값을 구하여라.

(1) $\sin(\alpha-\beta)$ (2) $\cos(\alpha+\beta)$ (3) $\tan(\alpha-\beta)$

예제 02 두 직선 $y=-3x+2$, $y=2x+1$이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

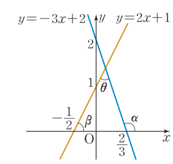
❶ **풀이** 두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면 $\tan\alpha=-3$, $\tan\beta=2$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2}=1$$



따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기는 45°이다.

답 45°

문제 4 두 직선 $2x-y+1=0$, $x-3y+2=0$이 이루는 예각의 크기를 구하여라.

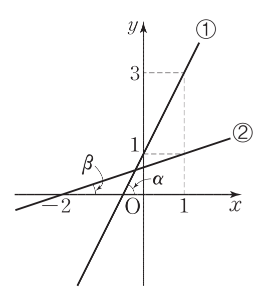
4

목표| 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $2x-y+1=0$에서 $y=2x+1$ ⋯⋯①

$x-3y+2=0$에서 $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$ ⋯⋯②

두 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 고 하면 $\tan\alpha=2$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$



두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

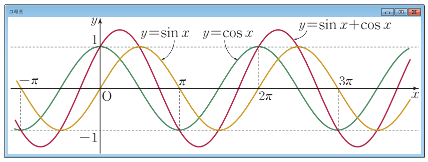
$$=\frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=1$$ 이므로 $\mathbf{\theta=45^\circ}$

삼각함수의 합성이란 무엇인가?

탐구 활동　다음 그림은 컴퓨터 프로그램을 이용하여 세 삼각함수

$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\sin x+\cos x$

의 그래프를 그린 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



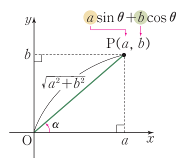
1. 세 함수의 주기가 서로 같은지 확인하여 보자.
2. 함수 $y=\sin x+\cos x$의 최댓값을 a라고 할 때, $y=a\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동한 그래프와 $y=\sin x+\cos x$의 그래프가 겹쳐질 수 있는지 말하여 보자.
3. 적당한 a와 α에 대하여 등식 $\sin x+\cos x=a\sin(x+\alpha)$가 성립할 수 있는지 말하여 보자.

삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $a\sin\theta+b\cos\theta$ $(a\neq0,\ b\neq0)$를

$r\sin(\theta+\alpha)$ $(r>0,\ 0\leq\alpha<2\pi)$

의 꼴로 나타내어 보자.

❶ 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 잡고, $\overline{\mathrm{OP}}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 α라고 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로



$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}a\sin\theta+b\cos\theta&=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)\\&=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\end{aligned}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

이와 같이 $a\sin\theta+b\cos\theta$ $(a\neq0,\ b\neq0)$를 $r\sin(\theta+\alpha)$ $(r>0)$의 꼴로 변형하여 나타내는 것을 삼각함수의 합성이라고 한다.

본문 해설

❶ $a\sin\theta+b\cos\theta$의 꼴에서 a, b의 부호가 다음과 같을 때에도 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 변형할 수 있다.

① $a>0$, $b>0$
② $a>0$, $b<0$
③ $a<0$, $b>0$
④ $a<0$, $b<0$

이때 각 α는

①일 때, 제1사분면의 각,
②일 때, 제4사분면의 각,
③일 때, 제2사분면의 각,
④일 때, 제3사분면의 각

을 나타낸다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\sin x+\cos x$의 주기와 최댓값을 관찰해 보고, $\sin x+\cos x$를 하나의 삼각함수로 표현할 수 있는지 알아보기 위한 활동이다.

1. 세 함수의 주기는 모두 **2π**이다.

2. $y=a\sin x$의 주기는 2π이고 최댓값이 a이다. 따라서 $y=a\sin x$를 x축의 방향으로 평행이동하면 $y=\sin x+\cos x$의 그래프와 **겹쳐질 수 있다.**

3. 2의 결과에서 $y=a\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\alpha$만큼 평행이동하면 $y=\sin x+\cos x$의 그래프와 겹쳐진다고 하자. 그러면 모든 실수 x에 대하여 $a\sin(x+\alpha)=\sin x+\cos x$가 성립한다.

참고| 실제로 $y=\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$만큼 평행이동하면 $y=\sin x+\cos x$의 그래프와 겹쳐진다.

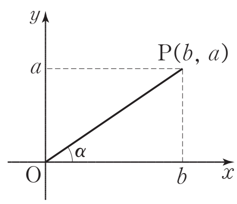
지/도/자/료　삼각함수의 합성의 오개념 지도

1. $a\sin\theta+b\sin\theta$ 꼴의 경우에도 합성을 이용하여 계산하려는 경우가 종종 발생한다.
그러나 이 경우에는 $\sin\theta$를 동류항으로 생각하여 $(a+b)\sin\theta$와 같이 계산할 수 있음을 유의하게 한다.

2. $a\sin\theta_1+b\cos\theta_2$ $(\theta_1\neq\theta_2)$ 꼴의 경우에도 합성을 이용하여 계산하려는 경우가 종종 발생한다.
그러나 이 경우에는 θ_1과 θ_2의 각이 서로 다르므로 삼각함수의 덧셈정리를 이용할 수 없다.
따라서 삼각함수의 합성을 할 때에는 sin과 cos의 각에 주의하도록 한다.

본문 해설

❶ 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(b,\ a)$를 잡고 x축의 양의 방향과 $\overline{\mathrm{OP}}$가 이루는 각을 α라고 하자.



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{a^2+b^2}$이므로

$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

로 놓으면

$a\sin\theta+b\cos\theta$

$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha\sin\theta+\cos\alpha\cos\theta)$

$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$

교과서 86 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수의 합성

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

❶ **참고** $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$로 놓으면
$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)$의 꼴로도 나타낼 수 있다.

예제 03 $\sin\theta+\cos\theta$를 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내어라. (단, $r>0$, $0\le\alpha<2\pi$)

풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 잡으면

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

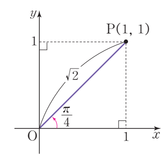
$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이므로 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

따라서

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta+\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$



답 $\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

문제 5 다음 식을 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내어라. (단, $r>0$, $0\le\alpha<2\pi$)

(1) $-\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$

삼각함수의 합성을 이용하여 삼각함수 $y=a\sin\theta+b\cos\theta$의 주기와 최댓값, 최솟값을 구하여 보자.

$y=a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

이므로 주기는 2π이다. 또한 $-1\le\sin(\theta+\alpha)\le1$이므로

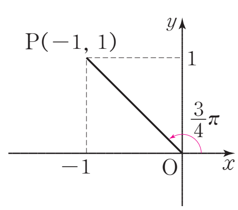
$-\sqrt{a^2+b^2}\le\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\le\sqrt{a^2+b^2}$

이다. 따라서 a, b가 동시에 0이 아니면 $y=a\sin\theta+b\cos\theta$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$이고, 최솟값은 $-\sqrt{a^2+b^2}$이다.

5

목표| 두 삼각함수의 합을 합성할 수 있게 한다.

풀이| (1) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(-1,\ 1)$을 잡으면



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

이므로 $\alpha=\dfrac{3}{4}\pi$

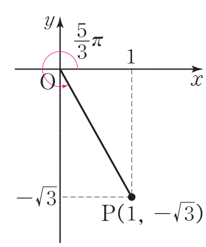
따라서

$-\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi\sin\theta+\sin\dfrac{3}{4}\pi\cos\theta\right)$

$=\boldsymbol{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{3}{4}\pi\right)}$

(2) 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 점 $\mathrm{P}(1,\ -\sqrt{3})$을 잡으면



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이므로 $\alpha=\dfrac{5}{3}\pi$

따라서

$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi\sin\theta+\sin\dfrac{5}{3}\pi\cos\theta\right)$

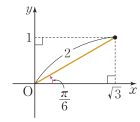
$=\boldsymbol{2\sin\left(\theta+\dfrac{5}{3}\pi\right)}$

교과서 87 쪽

예제 04 함수 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$의 최댓값과 최솟값, 주기를 각각 구하여라.

풀이 $\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$이므로

$$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$



$-2\le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\le 2$이므로 이 함수의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

또 $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이므로 주기는 2π이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2, 주기: 2π

문제 6 다음 함수의 최댓값과 최솟값, 주기를 각각 구하여라.

(1) $y=-\sin x-\cos x$　　(2) $y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

서로 다른 두 소리의 파동이 만나면 서로 간섭이 일어나 소리의 크기와 음의 높낮이가 변한다고 한다. 즉, 소리의 파동이 합성되어 파동의 모양이 변한다. 한 곳에 나오는 서로 다른 두 소리의 파동이

$$y=3\sin 120\pi t,\ y=4\cos 120\pi t$$

와 같을 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 소리가 합성되어 나오는 소리의 파동의 최댓값과 최솟값, 주기를 구하여라.

(2) (1)의 그래프를 공학적 도구를 이용하여 그리고, 최댓값과 최솟값, 주기를 확인하여라.

6

목표| 삼각함수의 합성을 이용하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값, 주기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$이므로

$$y=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi\sin x+\sin\frac{5}{4}\pi\cos x\right)$$
$$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{5}{4}\pi\right)$$

$-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{5}{4}\pi\right)\le\sqrt{2}$이므로 이 함수의 **최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다.**

또 $y=-\sin x-\cos x$의 그래프는 $y=\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{5}{4}\pi$만큼 평행이동한 것이므로 **주기는 2π이다.**

(2) $\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

$$y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$$
$$=2\left(-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$
$$=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi\sin x+\sin\frac{2}{3}\pi\cos x\right)$$
$$=2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)$$

$-2\le 2\sin\left(x+\frac{2}{3}\pi\right)\le 2$이므로 이 함수의 **최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.**

또 $y=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$의 그래프는 $y=2\sin x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{2}{3}\pi$만큼 평행이동한 것이므로 **주기는 2π이다.**

단원 과제

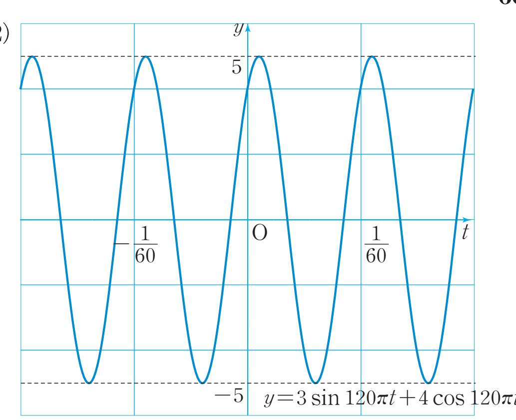
목표| 삼각함수의 합성을 이용하여 두 소리가 합성되어 나타나는 소리의 파동의 최댓값과 최솟값, 주기를 구하고, 이를 공학적 도구를 이용하여 확인할 수 있게 한다.

풀이| (1) $3\sin 120\pi t+4\cos 120\pi t=5\sin(120\pi t+\alpha)$

$$\left(\text{단, }\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

따라서 **최댓값은 5, 최솟값은 -5, 주기는 $\frac{1}{60}$이다.**

(2)



02 삼각함수의 극한

소단원 지도 목표

① 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수의 극한을 구할 수 있게 한다.

② $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}=1$임을 알고 이를 이용하여 여러 가지 삼각함수의 극한을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}=1$은 삼각함수의 극한을 계산하기 위한 기본적인 극한값으로 사인함수와 코사인함수의 도함수를 유도하는데 기초가 되는 중요한 정리이므로 충분히 이해하도록 지도한다.

2. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}=1$에서 각 x의 단위는 라디안임에 유의하게 한다.

교과서 88 쪽

02 삼각함수의 극한

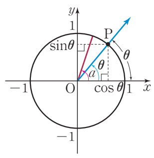
● 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

삼각함수의 극한은 어떻게 구하는가?

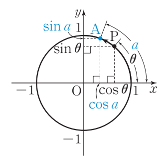
탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 단위원 위의 점 P가 점 (1, 0)에서 시계 반대 방향으로 θ만큼 움직였을 때 점 P의 좌표는 $(\cos\theta, \sin\theta)$이다. 이를 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. θ가 a에 한없이 가까워지면 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값은 각각 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말하여 보자.



탐구 활동에서 θ가 a에 한없이 가까워지면 점 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$는 점 $\mathrm{A}(\cos a, \sin a)$에 한없이 가까워지므로 점 P의 x좌표 $\cos\theta$는 $\cos a$에 한없이 가까워지고, y좌표 $\sin\theta$는 $\sin a$에 한없이 가까워진다.

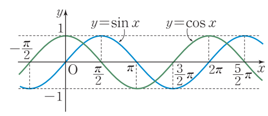


실제로 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프에서 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{x \to a} \sin x=\sin a$$

$$\lim_{x \to a} \cos x=\cos a$$

임을 알 수 있다.

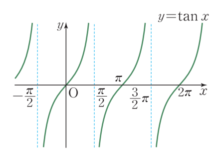


또한 탄젠트함수는 $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$이므로 $\cos x \neq 0$인 구간의 임의의 실수 a에 대하여

$$\lim_{x \to a} \tan x=\tan a$$

임을 그래프를 통하여 알 수 있다.

● $\cos x \neq 0$인 x의 범위는 $x \neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.



보기 (1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x=1$ (2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \tan x=1$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 각의 크기 θ가 어떤 값에 한없이 가까워질 때 삼각함수의 값이 어떤 값에 한없이 가까워지는 것을 확인하여 삼각함수의 극한을 직관적으로 이해하기 위한 활동이다.

1. $\theta \longrightarrow a$일 때

$$\sin\theta=\frac{\sin a}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{\sin a}{1}=\boldsymbol{\sin a}$$

$$\cos\theta=\frac{\cos a}{\overline{\mathrm{OP}}}=\frac{\cos a}{1}=\boldsymbol{\cos a}$$

지/도/자/료

1. "미적분 Ⅰ"과 같이 함수의 극한을 엄밀하게 정의하는 것은 고등학교 과정에서는 다루지 않는다. 따라서 수열에서와 같이 '한없이 가까워진다.'라는 표현을 사용하여 직관적으로 이해할 수 있도록 지도한다.

2. '$x \longrightarrow a$일 때 $f(x) \longrightarrow \alpha$'에서 '$x \longrightarrow a$'는 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워지는 것으로 $x \neq a$이다. 그러나 '$f(x) \longrightarrow \alpha$'는 $f(x)$가 갖는 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지는 것으로 이때에는 $f(x)$가 α를 값으로 가질 수도 있음에 유의하도록 지도한다.

1

목표| 삼각함수의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin x=\sin\frac{\pi}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(2) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x=\cos\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{0}$

(3) $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \tan x=\tan\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

교과서 89 쪽

문제 1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin x$ (2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x$ (3) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \tan x$

예제 01 극한값 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$를 구하여라.

$\frac{0}{0}$ 꼴이 나오지 않도록 분자 또는 분모의 식을 변형하여 약분한다.

풀이 $\cos^2 x=1-\sin^2 x=(1+\sin x)(1-\sin x)$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)=1+\sin\frac{\pi}{2}=2$$

답 2

문제 2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$ (2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{1-\tan^2 x}$

예제 02 극한값 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$을 구하여라.

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 실수 x의 값에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a} h(x)=\alpha$

풀이 $x\ne 0$일 때, $0\le\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1$이므로

$$0\le\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=|x|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|$$

이때 $\lim_{x\to 0}|x|=0$이므로 $\lim_{x\to 0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=0$

따라서 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

답 0

문제 3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$ (2) $\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}$

3

목표| 삼각함수의 치역을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 모든 실수 x에 대하여

$0\le|\sin x|\le 1$이므로

$x\ne 0$인 실수 x에 대하여

$$0\le\frac{|\sin x|}{|x|}=\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{|x|}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{|x|}=0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=0$$

따라서 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\mathbf{0}$

(2) $x\ne 0$일 때, $0\le\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 1$이므로

$$0\le|x^2|\left|\cos\frac{1}{x}\right|=\left|x^2\cos\frac{1}{x}\right|\le|x^2|$$

이때 $\lim_{x\to 0}|x^2|=0$이므로

$$\lim_{x\to 0} x^2\cos\frac{1}{x}=0$$

2

목표| $\frac{0}{0}$ 꼴의 삼각함수의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=\mathbf{2}$$

(2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan^2 x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\cos^2 x}{(1-\tan^2 x)\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)\cos^2 x}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-\cos^2 x}{\cos x+\sin x}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

지/도/자/료

1. 삼각함수의 극한값을 구할 때 자주 이용되는 삼각함수의 성질

(1) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

(2) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

(3) $\sin(x+\pi)=-\sin x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$

2. 미정계수를 결정할 때 이용되는 성질

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고, $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면

$\lim_{x\to a} f(x)=0$이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 컴퓨터의 공학용 계산기를 이용하여 $\frac{\sin x}{x}$의 값을 구해봄으로써 x의 값이 0에 가까워질 때, $\frac{\sin x}{x}$의 값의 극한을 예상할 수 있도록 하기 위한 활동이다.

1.

f(라디안)	$\frac{\sin x}{x}$
1	0.8415
0.5	0.9589
0.1	**0.9983**
0.01	**1.0000**
0.001	**1.0000**

2. 1에 가까워진다.

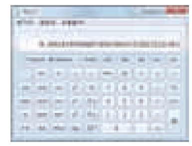
교과서 90 쪽

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$의 값은 어떻게 구하는가?

탐구 활동 컴퓨터에 내장된 계산기는 일반용, 공학용 등 여러 가지 모드로 사용이 가능하다. 공학용 모드로 설정한 계산기를 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음 표를 완성하여 보자.

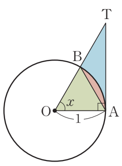
x(라디안)	$\frac{\sin x}{x}$
1	0.8415
0.5	0.9589
0.1	
0.01	
0.001	



2. x의 값이 0에 가까워질 때, $\frac{\sin x}{x}$의 값은 어떤 값에 가까워지는지 추측하여 보자.

함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$의 값을 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 중심이 점 O이고 반지름의 길이가 1인 원에서 부채꼴 OAB의 중심각 ∠AOB의 크기를 x라디안이라 하고, 점 A에서 원 O에 그은 접선과 선분 OB의 연장선의 교점을 T라고 하자.



(i) $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때

△OAB<(부채꼴 OAB의 넓이)<△OAT이므로

$$\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin x<\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot x<\frac{1}{2}\cdot1\cdot\tan x,\text{ 즉 }\ \sin x<x<\tan x$$

이다.

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}r^2\theta$이다.

이때 $\sin x>0$이므로 각 변을 $\sin x$로 나누면

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\text{ 즉 }\ 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$$

이다.

여기서 $\lim_{x\to0+}\cos x=1$이므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=1$$

읽/기/자/료 푸리에 급수


푸리에

프랑스의 푸리에(Fourier, J. B, J.; 1768~1830)는 당시의 많은 과학자와 마찬가지로 금속 막대, 판 등에서의 열의 전도에 관한 문제에 관심을 갖게 되었다. 그는 이에 관한 자신의 연구 결과를 1807년 12월 21일 프랑스 과학원에서 발표했는데, 닫힌 구간 $[-\pi, \pi]$에서 정의된 임의의 함수 $f(x)$는 아무리 심하게 변하더라도 다음과 같은 삼각급수로 나타내어진다고 주장했다.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad\cdots\cdots①$$

만약 급수 ①을 항별로 적분할 수 있고 함수 $f(x)$가 실제로 급수 ①과 같다면, '푸리에 계수' a_n과 b_n이 다음과 같이 결정됨을 밝힐 수 있다.

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \end{cases} \quad (\text{단, } n\geq0)\cdots\cdots②$$

②에 의해 결정된 계수를 가진 삼각 급수 ①을 $f(x)$의 '푸리에 급수'라고 하는데, 푸리에의 주장처럼 임의의 함수에 대하여 그 푸리에 급수가 그 함수에 수렴하지는 않는다.

독일의 디리클레(Dirichlet, J. P. G. L; 1805~1859)는 푸리에 급수가 수렴하기 위한 다음과 같은 조건을 찾았다.

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-\pi, \pi]$에서 유계이고 많아야 유한 개의 불연속인 점을 가지면, $f(x)$의 푸리에 급수는 연속인 모든 점에서 $f(x)$에 수렴하며, 불연속인 점에서는 $f(x)$의 좌극한과 우극한의 평균에 수렴한다.

(ii) $-\frac{\pi}{2}<x<0$일 때

$x=-t$로 놓으면 $x \to 0-$일 때 $t \to 0+$이므로

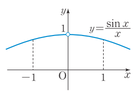
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$$\lim_{x\to0-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}=1$$

이다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$이 성립한다.

❶ 이상을 정리하면 다음과 같다.



함수 $\frac{\sin x}{x}$의 극한

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ (단, } x\text{는 라디안)}$$

예제 03 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$

풀이 (1) $3x=t$로 놓으면 $x \to 0$일 때 $t \to 0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to0}3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}$$
$$=3\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=3\cdot1=3$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot1=1$$

답 (1) 3 (2) 1

문제 4 다음 극한값을 구하여라.

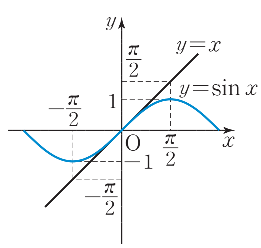
(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{2x}$ (2) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x}{5x}$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 4x}$ (4) $\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

본문 해설

❶ 오른쪽 그래프의 0 근방에서 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=x$의 그래프가 거의 일치함을 알 수 있다.

즉, $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$이 성립함을 직관적으로 이해할 수 있다.



4

목표 | $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$의 값을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{3}{2}}$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x}{5x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{5x\cos 4x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\frac{4}{5\cos 4x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{4}{5\cos 4x}=\mathbf{\frac{4}{5}}$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 4x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x\cdot\cos 4x}{\sin 4x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 3x}{x}\cos 4x}{\frac{\sin 4x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cos 4x}{\frac{\sin 4x}{4x}}\cdot\frac{3}{4}\right)$$
$$=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\lim_{x\to0}\cos 4x}{\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3}{4}$$
$$=\mathbf{\frac{3}{4}}$$

(4) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x\cdot\cos 2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\cos 2x}\cdot\frac{2}{5}\right)$$
$$=\frac{\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to0}\cos 2x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2}{5}$$
$$=\mathbf{\frac{2}{5}}$$

지/도/자/료

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta},\quad \lim_{x\to0}\frac{\tan\alpha x}{\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta},\quad \lim_{x\to0}\frac{\tan\alpha x}{\tan\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\tan\beta x}=\frac{\alpha}{\beta},\quad \lim_{x\to0}\frac{\tan\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$$

5

목표| 삼각함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x\,(1+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin x\,(1+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x\sin x(1+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x(1+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+\cos x}$

$=1\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x\sin x}\cdot\sin x$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$

$=1\cdot1=\mathbf{1}$

(3) $x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\dfrac{\pi}{2}$일 때,

$t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{t\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{-t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{-t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=\mathbf{1}$$

(4) $x-\pi=t$로 놓으면 $x\longrightarrow\pi$일 때, $t\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\tan x}{\pi-x}=\lim_{t\to0}\frac{\tan(\pi+t)}{-t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\tan t}{-t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{-t\cos t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\frac{-1}{\cos t}=\mathbf{-1}$$

교과서 92 쪽

예제 04 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{x-\pi}$

풀이 (1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\dfrac{1}{1+\cos x}\right\}=1^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(2) $x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{x-\pi}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin 2(\pi+t)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin 2t}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}2\cdot\dfrac{\sin 2t}{2t}=2\cdot1=2$

답 (1) $\dfrac{1}{2}$ (2) 2

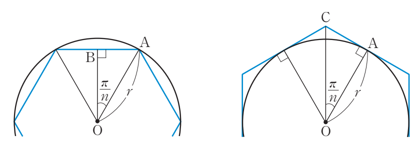
문제 5 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$ (4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan x}{\pi-x}$

창의 up

다음 그림은 반지름의 길이가 r인 원에 내접하는 정n각형과 외접하는 정n각형을 나타낸 것이다. 물음에 답하여라.



(1) 내접하는 정n각형의 둘레의 길이를 $f(n)$, 외접하는 정n각형의 둘레의 길이를 $g(n)$이라고 할 때, 삼각함수를 이용하여 $f(n)$과 $g(n)$을 나타내는 방법을 설명하여라.

(2) 반지름의 길이가 r인 원의 둘레의 길이를 l이라고 할 때, 부등식 $f(n)<l<g(n)$과 삼각함수의 극한을 이용하여 l의 값을 구하는 방법을 설명하여라.

창의 UP

출제 의도| 삼각함수의 극한을 이용하여 원의 둘레의 길이를 구하는 방법을 알아봄으로써 삼각함수의 극한의 유용성을 느끼고 문제 해결력을 기르기 위한 것이다.

풀이| (1) 내접하는 정n각형의 둘레의 길이는 삼각형 ABO에서 $\overline{AB}=r\sin\dfrac{\pi}{n}$이므로 $f(n)=2nr\sin\dfrac{\pi}{n}$

외접하는 정n각형의 둘레의 길이는 삼각형 ACO에서 $\overline{AC}=r\tan\dfrac{\pi}{n}$이므로 $g(n)=2nr\tan\dfrac{\pi}{n}$

(2) $x=\dfrac{1}{n}$로 놓으면 $n\longrightarrow\infty$일 때, $x\longrightarrow0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}2nr\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{x\to0}\frac{2r\sin\pi x}{x}=2\pi r$$

$$\lim_{n\to\infty}g(n)=\lim_{n\to\infty}2nr\tan\frac{\pi}{n}=\lim_{x\to0}\frac{2r\tan\pi x}{x}=2\pi r$$

$f(n)<l<g(n)$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=2\pi r$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}l=2\pi r$

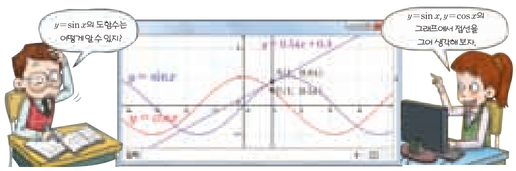
교과서 93 쪽

03 사인함수와 코사인함수의 미분

● 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.

사인함수와 코사인함수의 도함수는 어떻게 구하는가?

생각 열기



탐구 활동 생각 열기의 그래프에서 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 A와 곡선 $y=\cos x$ 위의 점 B의 x좌표가 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. $y=\sin x$의 $x=1$에서의 미분계수를 말하여 보자.

2. $\cos 1$의 값을 구하여 보자.

3. **1**, **2**에서 구한 값 사이의 관계를 말하여 보자.

삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하여 삼각함수의 도함수를 구하여 보자.

❶ 삼각함수 $y=\sin x$에서 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h-\sin x(1-\cos h)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{\sin x(1-\cos h)}{h}\\&=\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}-\sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=\cos x\end{aligned}$$

가 성립한다.

따라서 $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$이다.

$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$
$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h}=0$

03 사인함수와 코사인함수의 미분

소단원 지도 목표

① 삼각함수의 덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하여 사인함수와 코사인함수의 도함수를 구하는 방법을 이해하게 한다.

② 사인함수와 코사인함수의 도함수와 도함수의 성질을 활용하여 여러 가지 삼각함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 사인함수와 코사인함수의 도함수를 유도할 때에는 삼각함수의 덧셈정리와 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$을 이용할 수 있도록 지도한다.

2. $(\sin x)'=\cos x$에서 각 x의 단위는 라디안임에 유의하게 한다.

3. $\tan x$의 도함수는 이 단원에서 지도하지 않고 Ⅲ. 미분법에서 몫의 미분법을 이용하여 지도한다.

생각 열기 참/고/자/료

사인함수의 그래프와 코사인함수의 그래프를 비교할 때 그 개형을 관찰하면 사인함수의 도함수가 코사인함수인지 알기는 쉽지 않다. 그러나 각 x의 값에 대한 사인함수의 미분계수와 이때의 코사인함수의 값을 비교하면 사인함수의 도함수가 코사인함수임을 추측할 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 사인함수의 한 점에서의 미분계수와 코사인의 값을 비교해 봄으로써 사인함수의 도함수가 코사인함수임을 추측하기 위한 것이다.

1. 0.54

2. 0.54

3. 두 값이 서로 같다.

본문 해설

❶ 함수 $y=f(x)$가 미분가능한 각 점 x에 대하여

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

를 함수 $y=f(x)$의 도함수라고 한다.

따라서 함수 $y=\sin x$의 도함수는

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \text{ 또는}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

특히 함수 $y=\sin x$는 모든 실수 x에서 미분가능하므로 도함수의 정의역은 모든 실수이다.

1

목표| 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(\sin x)'+\sqrt{3}(\cos x)'$

$=\cos x+\sqrt{3}(-\sin x)$

$=\boldsymbol{\cos x-\sqrt{3}\sin x}$

(2) $y'=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$

$=\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot(-\sin x)$

$=\boldsymbol{\cos^2 x-\sin^2 x}$

2

목표| 사인함수와 코사인함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y'=(x\cos x)'-(\sin x)'$

$=\cos x+x(-\sin x)-\cos x$

$=-x\sin x$

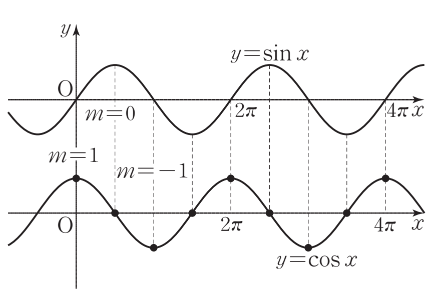
이므로 $x=\frac{\pi}{3}$를 위 식에 대입하면

$-\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

따라서 함수 $y=x\cos x-\sin x$의 $x=\frac{\pi}{3}$에서의 미분계수는 $\boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{6}}\pi$이다.

지/도/자/료 $y=\sin x$의 그래프와 $y=\cos x$의 그래프의 관계

어떤 함수의 $x=a$에서의 미분계수는 $x=a$에서의 접선의 기울기(m)이므로 $y=\sin x$의 그래프의 각 점에서 미분계수를 이용하면, $y=\sin x$의 도함수의 그래프가 곧 $y=\cos x$의 그래프가 된다.



교과서 94 쪽

$y=\cos x$에서 도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{-\sin x\sin h-\cos x(1-\cos h)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{-\sin x\sin h}{h}-\lim_{h\to0}\frac{\cos x(1-\cos h)}{h}\\&=-\sin x\cdot\lim_{h\to0}\frac{\sin h}{h}-\cos x\cdot\lim_{h\to0}\frac{1-\cos h}{h}=-\sin x\end{aligned}$$

가 성립한다.

따라서 $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

사인함수와 코사인함수의 도함수

(1) $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$

예제 01 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$ (2) $y=x^2\sin x$

풀이 (1) $y'=(\sqrt{3}\sin x)'-(\cos x)'=\sqrt{3}\cos x-(-\sin x)$

$=\sqrt{3}\cos x+\sin x$

(2) $y'=(x^2)'\sin x+x^2(\sin x)'$

$=2x\sin x+x^2\cos x$

답 (1) $y'=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ (2) $y'=2x\sin x+x^2\cos x$

문제 1 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ (2) $y=\sin x\cos x$

문제 2 함수 $y=x\cos x-\sin x$의 $x=\frac{\pi}{3}$에서의 미분계수를 구하여라.

중/단/원 기초

1

목표| 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

(2) $\sin\frac{\pi}{12}=\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

(3) $\cos 75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

(4) $\cos\frac{7}{12}\pi=\cos 105^\circ=\cos(60^\circ+45^\circ)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

(5) $\tan 195^\circ=\tan(150^\circ+45^\circ)=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$

(6) $\tan\frac{5}{12}\pi=\tan 75^\circ=\tan(45^\circ+30^\circ)=\boldsymbol{2+\sqrt{3}}$

교과서 95 쪽

중단원 기초

[해답 p.207]

수준별 학습

1 다음 삼각함수의 값을 구하여라. — 01 삼각함수의 덧셈정리

(1) $\sin 105°$ (2) $\sin \frac{\pi}{12}$

(3) $\cos 75°$ (4) $\cos \frac{7}{12}\pi$

(5) $\tan 195°$ (6) $\tan \frac{5}{12}\pi$

2 다음 식을 $r\sin(\theta+\alpha)$의 꼴로 나타내어라. — 01 삼각함수의 덧셈정리 삼각함수의 합성

(1) $4\sin\theta+3\cos\theta$ (2) $-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

3 다음 극한값을 구하여라. — 02 삼각함수의 극한

(1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin x - x\cos x)$ (2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\tan x}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$ (4) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}$

(5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$ (6) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

4 다음 함수를 미분하여라. — 03 사인함수와 코사인함수의 미분

(1) $y=\cos x - \sin x$ (2) $y=x\sin x$

2

목표| 삼각함수의 합성을 할 수 있게 한다.

풀이| (1) 좌표평면 위에 점 P(4, 3)을 잡으면

$\overline{OP}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

x축의 양의 방향과 $\overline{OP}$가 이루는 각을 α라고 하면

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$이므로

$4\sin\theta+3\cos\theta$

$=5\left(\frac{4}{5}\sin\theta+\frac{3}{5}\cos\theta\right)$

$=5(\cos\alpha\sin\theta+\sin\alpha\cos\theta)$

$=\mathbf{5\sin(\theta+\alpha)}$ $\left(\textbf{단, } \cos\alpha=\frac{4}{5},\ \sin\alpha=\frac{3}{5}\right)$

(2) 좌표평면 위에 점 P$(-1, \sqrt{3})$을 잡으면

$\overline{OP}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

x축의 양의 방향과 $\overline{OP}$가 이루는 각을 α라고 하면

$\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$

$-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$

$=2\left(-\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi\sin\theta+\sin\frac{2}{3}\pi\cos\theta\right)$

$=\mathbf{2\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)}$

3

목표| 삼각함수의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}(\sin x - x\cos x)=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}}$

(2) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\tan x}=\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(3) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}$

$=5\cdot 1=\mathbf{5}$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x\cos 3x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3}{2\cos 3x}$

$=1\cdot\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

(5) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left\{-\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{\cos x - 1}\right\}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-1-\cos x)=\mathbf{-1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(6) $x-\pi=t$로 놓으면 $x\to\pi$일 때, $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(-\pi+t)}{t}$

$=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{t}=\mathbf{-1}$

4

목표| 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(\cos x)'-(\sin x)'$

$=\mathbf{-\sin x-\cos x}$

(2) $y'=(x)'\sin x+x(\sin x)'$

$=\mathbf{\sin x+x\cos x}$

교과서 96 쪽

중단원 기본

[해답 p.207]

수준별 학습

1 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$이고 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{5}{13}$일 때, 다음 값을 구하여라.

(1) $\sin(\alpha+\beta)$ (2) $\cos(\alpha-\beta)$ (3) $\tan(\alpha+\beta)$

01 삼각함수의 덧셈정리

2 두 직선 $3x-y+1=0$, $x-2y+2=0$이 이루는 예각의 크기를 θ라고 할 때, $\tan\theta$의 값을 구하여라.

01 삼각함수의 덧셈정리
두 직선이 이루는 예각의 크기

3 함수 $y=3\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$의 최댓값과 최솟값, 주기를 각각 구하여라.

01 삼각함수의 덧셈정리
삼각함수의 합성

4 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan 3x)}{\tan 2x}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x}$ (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}$

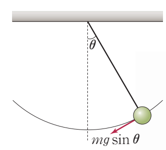
02 삼각함수의 극한

5 오른쪽 그림과 같이 질량이 m kg인 시계추와 지면에 수직인 선분과 이루는 각의 크기가 θ일 때, 추가 움직이는 방향으로 받는 힘의 크기 $f(\theta)$는

$$f(\theta)=mg\sin\theta$$

이다. 이때 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하여라.

(단, 시계추의 질량 m은 500 g이고, 중력가속도 g는 10 m/s^{2}이다.)



03 사인함수와 코사인함수의 미분

중/단/원 기본

1

목표| 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$이므로

$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$

이때 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$, $\tan\beta=-\frac{12}{5}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\mathbf{-\frac{33}{65}}$

(2) $\cos(\alpha-\beta)$

$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\mathbf{-\frac{16}{65}}$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\mathbf{-\frac{33}{56}}$

2

목표| 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $3x-y+1=0$에서 $y=3x+1$ ······①

$x-2y+2=0$에서 $y=\frac{1}{2}x+1$ ······②

두 직선 ①, ②가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면 $\tan\alpha=3$, $\tan\beta=\frac{1}{2}$

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\mathbf{1}$

3

목표| 삼각함수의 합성을 이용하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $3\sin x-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$=3\sin x-2\left(\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=3\sin x-\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\sin x-\sqrt{3}\cos x$

$=\sqrt{7}\sin(x+\alpha)\left(단,\ \cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}},\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$

따라서 최댓값은 $\mathbf{\sqrt{7}}$, 최솟값은 $\mathbf{-\sqrt{7}}$, 주기는 $\mathbf{2\pi}$이다.

4

목표| 삼각함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{2\sin 2x}{2x}+\frac{3\sin 3x}{3x}\right)=\mathbf{6}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan 3x)}{\tan 2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\tan 3x)}{\tan 3x}\cdot\frac{\tan 3x}{3x}\cdot\frac{2x}{\tan 2x}\cdot\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{4\sin 4x}{4x}-\frac{2\sin 2x}{2x}\right)\cdot\frac{x}{\sin x}=\mathbf{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 3x-\cos^2 x}{x^2(\cos 3x+\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin^2 3x+\sin^2 x}{x^2(\cos 3x+\cos x)}=(-9+1)\times\frac{1}{2}=\mathbf{-4}$

교과서 97 쪽

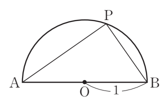
중단원 실력

[해답 p.207]

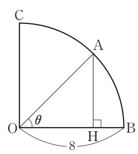
수준별 학습

1 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값을 구하여라. 01 삼각함수의 덧셈정리

2 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원에서 호 AB 위의 점 P에 대하여 $2\overline{AP}+3\overline{BP}$의 최댓값을 구하여라. 01 삼각함수의 덧셈정리



3 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 8인 사분원 위의 한 점 A에서 반지름 OB에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle AOB=\theta$라고 할 때, $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}$의 값을 구하여라. 02 삼각함수의 극한



4 다음 중에서 함수 $f(x)=\cos x$에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라. 03 사인함수와 코사인함수의 미분

ㄱ $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=1$ ㄴ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ ㄷ $f'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-f(x)$

5

목표| 삼각함수의 미분을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f'(\theta)=mg\cos\theta$, $m=0.5$, $g=10$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0.5\times10\times\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{\frac{5\sqrt{3}}{2}}$$

중/단/원 실력

1

목표| 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$ ······①

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ······②

①, ②의 양변을 각각 제곱하면

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{4}$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}$

에서 $2+2(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta)=\frac{3}{4}$

$\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\frac{5}{8}$

따라서 $\cos(\alpha-\beta)=\mathbf{-\frac{5}{8}}$

2

목표| 삼각함수의 합성을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 APB에서 $\angle BAP=\theta$로 놓으면

$\overline{AP}=2\cos\theta$, $\overline{BP}=2\sin\theta$

$2\overline{AP}+3\overline{BP}=4\cos\theta+6\sin\theta$

$=\sqrt{52}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{52}},\ \sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{52}}\right)$

따라서 최댓값은 $\mathbf{2\sqrt{13}}$

3

목표| 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=8-8\cos\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8(1-\cos\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{8\sin^2\theta}{\theta^2}\times\frac{1}{1+\cos\theta}\right)=\mathbf{4}$$

4

목표| 삼각함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=-\sin x$, $f(0)=1$이므로

ㄱ $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$

$=f'(0)=-\sin0=0$

ㄴ $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

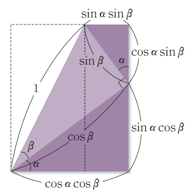
ㄷ $f'\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x=-f(x)$

따라서 옳은 것은 **ㄴ, ㄷ**이다.

수행 과제

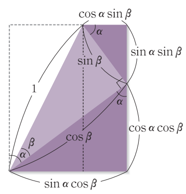
종이접기로 알 수 있는 삼각함수의 덧셈정리

종이접기를 이용하면 삼각함수의 덧셈정리를 간단히 얻을 수 있다.
A4 용지 한 장을 준비하여 오른쪽 그림과 같이 A4 용지의 왼쪽 위 끝을 용지의 오른쪽 변에 닿도록 접는다. 이때 접힌 부분의 길이를 1, 용지의 왼쪽 아래의 두 각을 α, β라고 하자. 그러면 다음과 같은 공식을 얻을 수 있다.

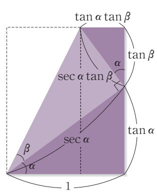


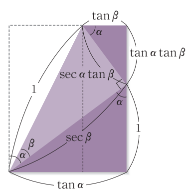
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

| 과 제 | **1** 오른쪽 그림과 같이 A4 용지를 접은 후 두 각 α, β를 표시하면 $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$에 대한 공식을 얻을 수 있음을 설명하여라.



| 과 제 | **2** 다음 그림과 같이 A4 용지를 접은 후 두 각 α, β를 표시하면 각각 $\tan(\alpha+\beta)$, $\tan(\alpha-\beta)$에 대한 공식을 얻을 수 있음을 설명하여라.





대단원 학습 내용 정리

1 일반각과 호도법

(1) 일반각: $\theta=360^\circ\times n+\alpha^\circ$ (n은 정수, $0^\circ\le\alpha^\circ<360^\circ$)

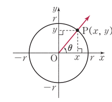
(2) 호도법: 1라디안$=\dfrac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$라디안

2 삼각함수

(1) $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$, $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$, $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$

$\csc\theta=\dfrac{r}{y}$, $\sec\theta=\dfrac{r}{x}$, $\cot\theta=\dfrac{x}{y}$

(2) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$



3 삼각함수의 그래프와 성질

(1) 삼각함수의 그래프

삼각함수	정의역	치역	주기	비고
$y=\sin x$	모든 실수	$\{y \mid -1\le y\le 1\}$	2π	원점 대칭
$y=\cos x$	모든 실수	$\{y \mid -1\le y\le 1\}$	2π	y축 대칭
$y=\tan x$	$x\ne n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 인 실수	모든 실수	π	원점 대칭

(2) 여러 가지 각에 대한 삼각함수

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$2n\pi+\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
$-\theta$	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$-\tan\theta$
$\pi+\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$\tan\theta$
$\pi-\theta$	$\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\tan\theta$
$\dfrac{\pi}{2}+\theta$	$\cos\theta$	$-\sin\theta$	$-\cot\theta$
$\dfrac{\pi}{2}-\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$\cot\theta$

4 삼각함수의 활용

(1) 방정식 $\sin\theta=a$를 만족시키는 θ의 값은 함수 $y=\sin\theta$와 직선 $y=a$와의 교점을 이용하여 구하거나 단위원과 직선 $y=a$와의 교점을 이용하여 구한다.

(2) 부등식 $\sin\theta>a$를 만족시키는 θ값의 범위는 함수 $y=\sin\theta$와 직선 $y=a$의 교점을 이용하여 구하거나, 단위원과 직선 $y=a$와의 교점을 이용하여 구한다.

5 삼각함수의 덧셈정리

(1) 삼각함수의 덧셈정리

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

(2) 삼각함수의 합성

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

$\left(\text{단, } \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

6 삼각함수의 극한

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (단, x는 라디안)

7 사인함수와 코사인함수의 미분

(1) $y=\sin x$이면 $y'=\cos x$

(2) $y=\cos x$이면 $y'=-\sin x$

용어와 기호 시초선, 동경, 일반각, 호도법, 라디안, 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수, 삼각함수, 주기, 주기함수, 덧셈정리, $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\csc\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$

수행 과제

● 수행 과제 의도

종이접기를 이용하여 삼각함수의 덧셈정리를 얻을 수 있음을 확인하면서 삼각함수의 덧셈정리의 이해를 높이고 익숙하게 활용할 수 있게 하기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

그림의 직각삼각형에서 각 $\alpha-\beta$에 대한 삼각함수의 값은

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{1}=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{1}=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

과제 2 _풀이

첫 번째 그림의 직각삼각형에서 각 $\alpha+\beta$에 대하여

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

두 번째 그림의 직각삼각형에서 각 $\alpha-\beta$에 대하여

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

교과서 100 쪽

대 / 단 / 원 평가 문제

Ⅱ. 삼각함수

선택형

1 다음 중에서 동경이 일치하는 각끼리 짝지은 것은?

① 20°, 750° ② $\frac{2}{3}\pi$, 135° ③ $\frac{3}{2}\pi$, -90° ④ $-\frac{4}{3}\pi$, 240° ⑤ $\frac{5}{4}\pi$, 420°

2 원점 O와 점 P$(-3,\ 4)$를 지나는 동경 OP가 나타내는 각을 θ라고 할 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

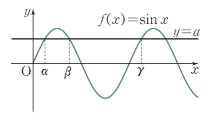
3 함수 $f(x)=3\sin(2x-3)+2$의 주기와 최댓값, 최솟값을 각각 p, q, r라고 할 때, pqr의 값은?

① -5π ② -3π ③ $-\pi$ ④ 0 ⑤ π

4 이차방정식 $3x^2-5x+2=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$일 때, $\tan(\alpha+\beta)$의 값은?

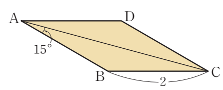
① 0 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

5 함수 $f(x)=\sin x\,(x>0)$의 그래프와 직선 $y=a\,(0<a<1)$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례로 α, β, γ라고 할 때, $f(\alpha+\beta+\gamma)$의 값은?



① $-2a$ ② $-a$ ③ 0 ④ a ⑤ $2a$

6 한 변의 길이가 2인 마름모 ABCD에서 $\angle BAC=15^\circ$일 때, 마름모 ABCD의 넓이는?



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

7 $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{1}{2}$일 때, $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{2}$

대 / 단 / 원 평 가 문 제

1

목표| 동경과 일반각의 개념을 이해하게 한다.

풀이| ① $750^\circ=360^\circ\times2+30^\circ$이므로 20°가 나타내는 동경과 일치하지 않는다.

② $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=120^\circ$이므로 135°가 나타내는 동경과 일치하지 않는다.

③ $\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=270^\circ$, $270^\circ=360^\circ\times1-90^\circ$이므로 -90°가 나타내는 동경과 일치한다.

④ $-\frac{4}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\frac{2}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=120^\circ$이므로 240°가 나타내는 동경과 일치하지 않는다.

⑤ $\frac{5}{4}\pi=\frac{5}{4}\pi\times\frac{180^\circ}{\pi}=225^\circ$, $420^\circ=360^\circ\times1+60^\circ$이므로 두 각의 동경은 일치하지 않는다.

답 ③

4

목표| 탄젠트함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{5}{3}$, $\tan\alpha\tan\beta=\frac{2}{3}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=5$이다.

답 ③

5

목표| 사인함수의 그래프와 그 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\beta=\pi-\alpha$, $\gamma=2\pi+\alpha$이므로

$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\pi-\alpha)+(2\pi+\alpha)=3\pi+\alpha$

$f(\alpha+\beta+\gamma)=f(3\pi+\alpha)=f(\pi+\alpha)$

$=\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha=-a$

답 ②

2

목표| 삼각함수의 정의를 이용하여 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{OP}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=-\frac{3}{5}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$

답 ③

3

목표| 삼각함수의 그래프의 성질을 이용하여 미지수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=3\sin(2x-3)+2$는 함수 $y=3\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{3}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다. 따라서 주기는 $p=\frac{2\pi}{2}=\pi$, 최댓값은 $q=3+2=5$, 최솟값은 $r=-3+2=-1$이므로 $pqr=-5\pi$이다.

답 ①

6

목표| 삼각함수를 이용하여 마름모의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\triangle$ABC는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle ABC=180^\circ-2\times15^\circ=150^\circ$

$\triangle\ ABC=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin 150^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$

따라서 마름모 ABCD의 넓이는

$2\times\triangle ABC=2$ 답 ③

7

목표| 삼각함수의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)$

$=2\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2}$

에서

$\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)$

$=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$

$\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2}{3}\pi$에서 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)>0$이므로

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}$

$=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right)$

$=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$

$=2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{2}$ 답 ⑤

8

목표| 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| θ가 제2사분면의 각이므로 $\sin\theta>0$

$\sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\frac{12}{13}$

교과서 101 쪽

[해답 p.208]

8 θ가 제2사분면의 각이고 $\cos\theta=-\frac{5}{13}$일 때, $\csc\theta+\cot\theta$의 값은?

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ 0
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

9 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$의 값은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 1
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

10 등식 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{ax+b}=3$이 성립하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

11 함수 $f(x)=x\sin x$에 대하여 $\lim_{h\to0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{h}$의 값은?

① -2π ② $-\pi$ ③ 0
④ π ⑤ 2π

서답형

12 호의 길이가 2π cm이고, 넓이가 6π cm^2인 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 각각 구하여라.

13 부등식 $\sin x>\frac{1}{\sqrt{2}}$을 만족시키는 x값의 범위를 구하여라. (단, $0\le x<2\pi$)

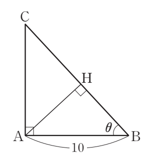
|서|술|형|

14 함수 $f(x)=\tan x$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $g\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{3}\right)=\theta$라고 할 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

$\left(\text{단, } 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

|서|술|형|

15 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=10$인 직각삼각형 ABC가 있다. 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle ABC=\theta$라고 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



$\csc\theta+\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\frac{13}{12}-\frac{5}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ 답 ④

9

목표| 삼각함수의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{\cos x-1}{x^2\cos x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{-\sin^3 x}{x^3}\times\frac{1}{\cos x\,(\cos x+1)}\right\}=-\frac{1}{2}$

답 ②

10

목표| 삼각함수의 극한을 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x \to 0$일 때, (분자) $\to 0$이고 (분모) $\to 0$이므로 $b=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{ax}=\frac{3}{a}=3,\ a=1$

따라서 $a+b=1$

답 ③

11

목표| 사인함수의 미분법을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=\sin x+x\cos x$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\cdot 2$

$=2f'(\pi)=2(\sin\pi+\pi\cos\pi)=-2\pi$

답 ①

12

목표| 호도법을 이용하여 부채꼴의 반지름의 길이와 중심각의 크기를 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 중심각의 크기를 θ라고 하면

$6\pi=\frac{1}{2}r\times 2\pi$에서 $r=6(\mathrm{cm})$

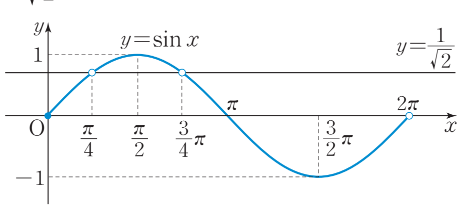
$6\pi=\frac{1}{2}\times 6^2\times\theta$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$

답 반지름의 길이: 6 cm, 중심각의 크기: $\frac{\pi}{3}$

13

목표| 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있게 한다.

풀이| 부등식 $\sin x>\frac{1}{\sqrt{2}}$의 해는 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$보다 윗부분에 있는 x값의 범위이다.



따라서 $\sin x>\frac{1}{\sqrt{2}}$의 해는 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$

답 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$

14

목표| 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $g\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha,\ g\left(\frac{1}{3}\right)=\beta$로 놓으면

$\tan\alpha=\frac{1}{2},\ \tan\beta=\frac{1}{3}$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$

따라서 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

$\theta=\alpha+\beta$이므로 $\sin\theta=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$g\left(\frac{1}{2}\right)=\alpha,\ g\left(\frac{1}{3}\right)=\beta$로 놓기	20%
	$\tan(\alpha+\beta)$의 값 구하기	40%
	$\alpha+\beta$의 값 구하기	20%
답 구하기	$\sin\theta$의 값 구하기	20%

15

목표| 삼각함수의 극한을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{AC}=10\tan\theta$,

$\triangle ABC$와 $\triangle HAC$에서

$\angle CAB=\angle CHA=90^\circ$

$\angle CBA=90^\circ-\angle HAB=\angle CAH$

이므로 $\triangle ABC \backsim HAC$

따라서 $\angle CAH=\theta$, $\sin\theta=\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}}$이므로

$\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta=10\tan\theta\cdot\sin\theta=\frac{10\sin^2\theta}{\cos\theta}$

따라서 $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{10\sin^2\theta}{\theta^2\cos\theta}=10$

답 10

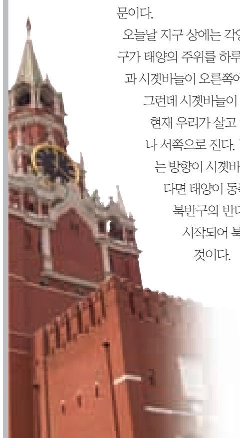
채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$\overline{AC}$의 길이를 θ에 관한 식으로 나타내기	30%
	$\overline{CH}$의 길이를 θ에 관한 식으로 나타내기	30%
답 구하기	$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}$의 값 구하기	40%

M+ Real Life

수 학 + 실 생 활

시계와 각



인류 최초의 시계는 땅에 막대를 꽂아 놓고 시간을 측정했던 그노몬(gnomon)이다. 이 시계는 수직으로 세운 막대 때문에 생기는 그림자의 길이로 낮 동안의 시간을 나타내도록 되어 있다. 기원전 8세기경부터는 좀더 정밀한 장치가 사용되었는데, 최초의 해시계는 고대 이집트에서 만들어졌다고 한다.

해시계는 태양이 가장 높이 떠올랐을 때를 정오로 하여 태양의 위치에 따라 시간을 알려 준다. 그러나 실제 정오와 태양이 가장 높이 떠올랐을 때의 시간은 계절에 따라 약간씩 다르다. 어떤 날은 하루가 24시간보다 길고 또 어떤 날은 24시간보다 짧다. 그래서 해시계는 각을 측정하여 최대 분 단위까지만 알 수 있다. 왜냐하면 실제로 지구에 설치한 해시계는 태양이 움직이는 궤도에 따라 변하는 막대의 각을 측정하는 데, 1분에 단지 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$ 정도가 변할 뿐이고, 해시계에서 $\left(\frac{1}{4}\right)^\circ$가 변하는 것을 알아낸다는 것은 어려운 일이기 때문이다.

오늘날 지구 상에는 각양각색의 시계가 있다. 그런데 시계에는 변하지 않는 공통점이 있다. 그것은 지구가 태양의 주위를 하루에 한 번 회전한다는 사실에서 360°를 12등분 하여 각 시간 간격이 30°라는 것과 시곗바늘이 오른쪽에서 왼쪽으로 회전한다는 것이다.

그런데 시곗바늘이 오른쪽에서 왼쪽으로 회전하게 된 이유는 무엇일까?

현재 우리가 살고 있는 지구의 북반구에서 볼 때, 태양은 동쪽에서 떠서 북반구의 남쪽 하늘을 지나 서쪽으로 진다. 맑은 날 긴 막대를 땅에 세워 놓고 그림자를 살펴보면 막대의 그림자가 움직이는 방향이 시곗바늘이 움직이는 방향과 같다는 것을 알 수 있다. 만일 우리가 지구의 남반구에 있다면 태양이 동쪽에서 떠서 남반구의 북쪽 하늘을 지나 서쪽으로 지기 때문에 태양의 그림자가 북반구의 반대 방향으로 움직이는 것을 보게 될 것이다. 그런데 인류의 문명이 북반구에서 시작되어 북반구를 기준으로 하였기 때문에 시곗바늘이 오른쪽에서 왼쪽으로 회전하게 된 것이다.

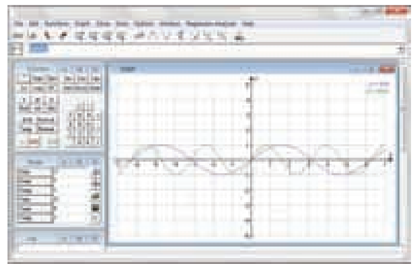
컴퓨터를 이용하여 삼각함수의 그래프 그리기

함수의 그래프를 그리는 컴퓨터 프로그램을 이용하여 삼각함수의 그래프를 그려 보자.

두 삼각함수 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$의 그래프를 한 평면 위에 그린 다음 주기를 구하여 보자.
(단, $\pi=3.14$로 계산한다.)

① 수식 입력 창에 'sin x'를 입력한 후 를 누르면 $y=\sin x$의 그래프가 그려진다.

② 수식 입력 창에 적힌 함수의 식을 지우고 'sin $2x$'를 입력한 후 를 누르면 $y=\sin 2x$의 그래프가 추가되어 다음 그림과 같이 두 함수의 그래프가 그려진다.



③ 따라서 $y=\sin x$의 주기는 2π이고 $y=\sin 2x$의 주기는 π이다.

| 과 제 | 컴퓨터 프로그램을 이용하여 다음 각 함수의 그래프를 그리고 최댓값과 최솟값, 주기를 구하여라. (단, $\pi=3.14$로 계산한다.)

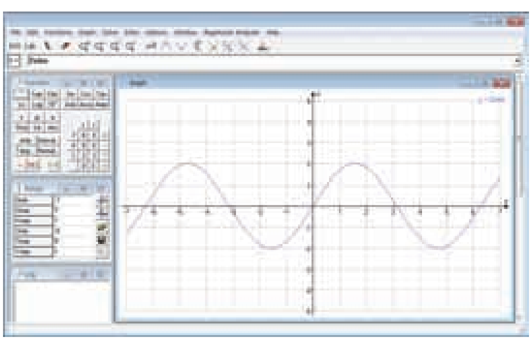
(1) $y=2\sin x$
(2) $y=\sin(x+\pi)$
(3) $y=\cos x+1$
(4) $y=2\cos(x+\pi)$
(5) $y=\tan 2x$
(6) $y=\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

수 학 + 공 학

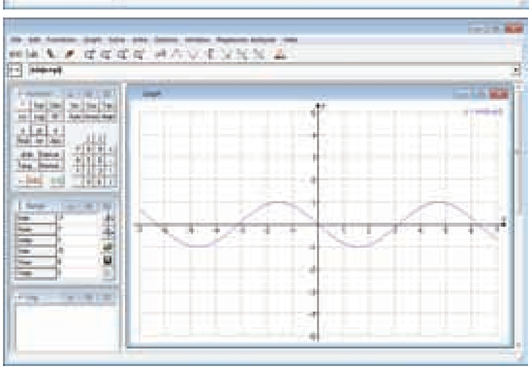
M+ Engineering

과제 _풀이

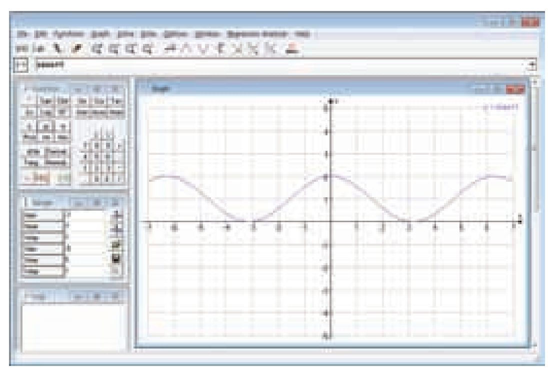
(1)



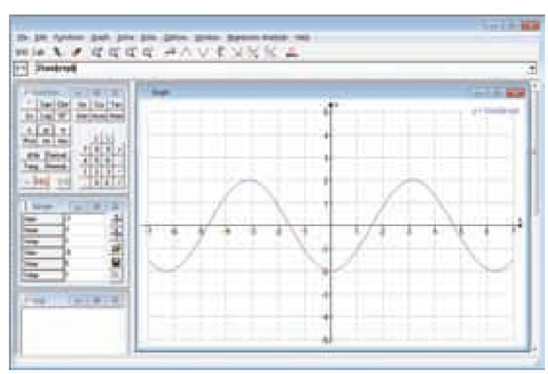
(2)



(3)



(4)



교과서 104 쪽

M+ Engineering

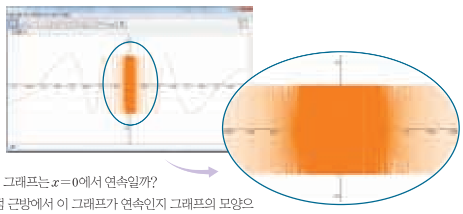
수학 ✚ 공학

삼각함수의 그래프와 함수의 극한

컴퓨터를 이용하면 생각하기 어려운 삼각함수의 그래프의 모양을 쉽게 이해할 수 있다.

1 \ $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & (x\neq0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 의 그래프

(1) 이 그래프의 원점 근방의 모양을 상상하기는 쉽지 않지만 컴퓨터를 이용하면 다음 그림과 같이 원점 근방에서 매우 조밀하게 그려진 그래프를 확인할 수 있다.



(2) 이 그래프는 $x=0$에서 연속일까?

원점 근방에서 이 그래프가 연속인지 그래프의 모양으로는 쉽게 확인하기 어렵다. 그러나

$$\lim_{x\to0+}\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to\infty}\sin t,\ \lim_{x\to0-}\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to-\infty}\sin t$$

이므로 $\sin\frac{1}{x}$의 좌극한과 우극한이 모두 진동하여 극한값이 존재하지 않음을 알 수 있다. 즉, $x=0$에서 불연속이다.

교과서 105 쪽

2 \ $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ 의 그래프

(1) 한편 $y=x\sin\frac{1}{x}$의 그래프를 컴퓨터를 이용하여 그리면 다음 그림과 같이 x의 값이 한없이 커지면 함숫값이 1에 가까워지고, x의 값이 0에 가까워지면 함숫값이 점점 작아지면서 조밀하게 그려지는 것을 확인할 수 있다.

(2) 이 그래프는 $x=0$에서 연속일까?

$-1\le\sin\frac{1}{x}\le1$이므로

$-|x|\le x\sin\frac{1}{x}\le|x|$

즉, $\lim_{x\to0}(-|x|)\le\lim_{x\to0}f(x)\le\lim_{x\to0}|x|$가 성립한다.

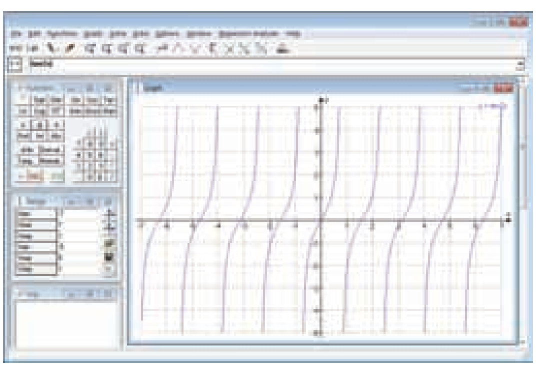
따라서 $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$, 즉 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이므로 $x=0$에서 연속임을 확인할 수 있다.

(3) 왜 직선 $y=1$이 점근선일까?

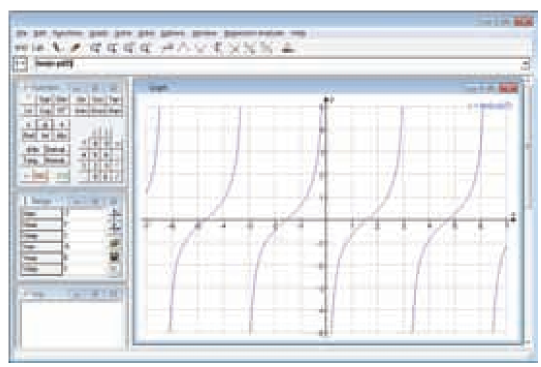
$\frac{1}{x}=t$라고 하면 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1$

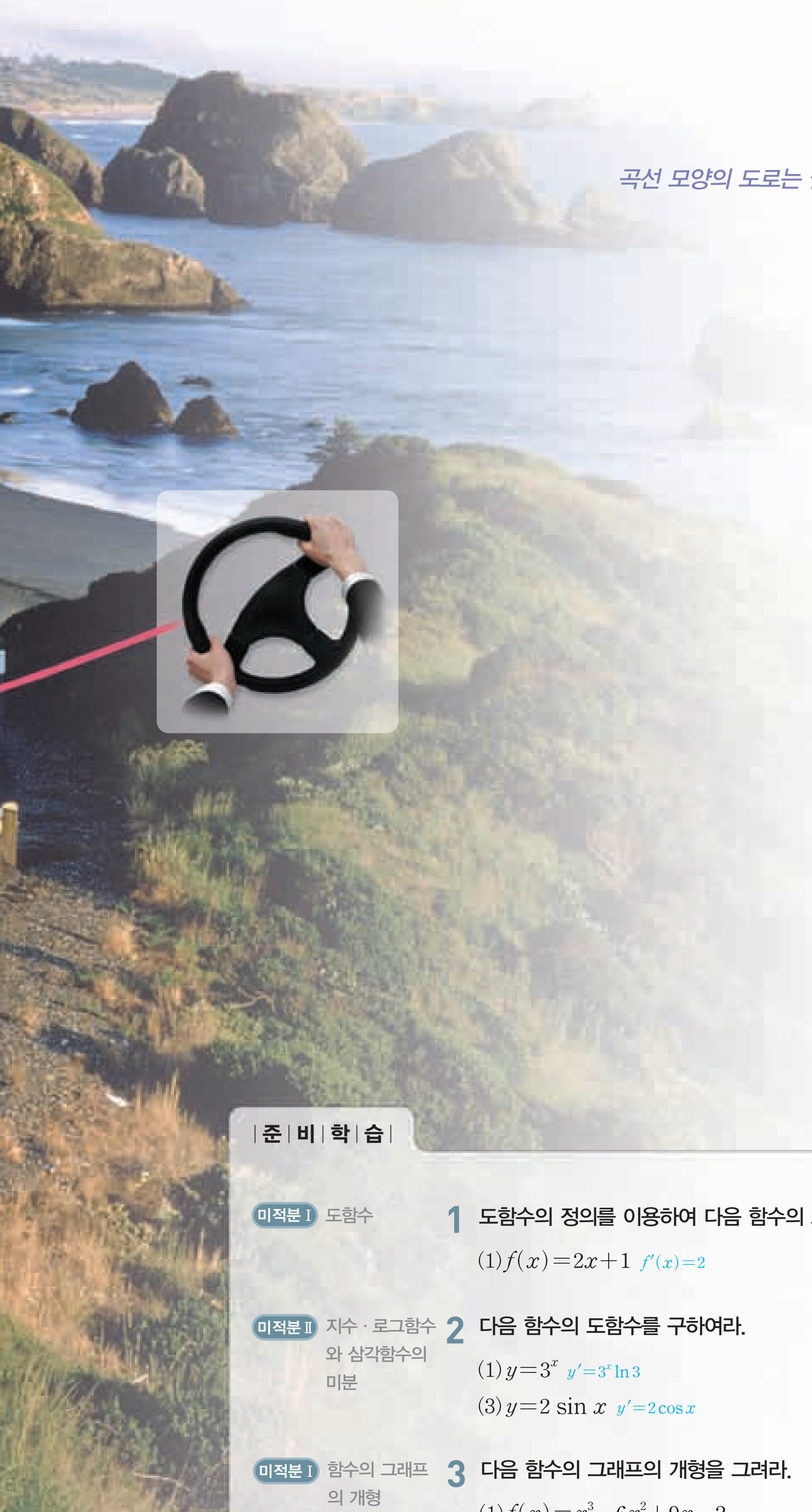
따라서 $\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$이므로 직선 $y=1$이 점근선임을 확인할 수 있다.

(5)



(6)





곡선 모양의 도로는 급격한 운전대 조작을
하지 않아도 되는 형태이다.

미분법

|준|비|학|습|

미적분 I 도함수

1 도함수의 정의를 이용하여 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=2x+1$ $f'(x)=2$ (2) $f(x)=x^2+x$ $f'(x)=2x+1$

미적분 II 지수 · 로그함수와 삼각함수의 미분

2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

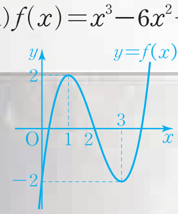
(1) $y=3^x$ $y'=3^x\ln 3$ (2) $y=\log_3 x$ $y'=\dfrac{1}{x\ln 3}$

(3) $y=2\sin x$ $y'=2\cos x$ (4) $y=3\cos x$ $y'=-3\sin x$

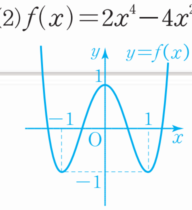
미적분 I 함수의 그래프의 개형

3 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$



(2) $f(x)=2x^4-4x^2+1$



단원의 지도 목표

1. 여러 가지 미분법

① 함수의 몫을 미분할 수 있게 한다.
② 합성함수를 미분할 수 있게 한다.
③ 역함수를 미분할 수 있게 한다.
④ 이계도함수를 구할 수 있게 한다.

2. 도함수의 활용

① 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.
③ 방정식과 부등식에 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 유리함수와 탄젠트함수의 미분은 함수의 몫의 미분에서 다룬다.
② $y=x^n$ (n은 실수)의 도함수를 구할 수 있도록 한다.
③ 삼계도함수 이상은 다루지 않는다.
④ 도함수의 다양한 활용을 통해 미분 개념이 실생활에 유용함을 인식하게 한다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습

[수학Ⅱ]
합성함수
역함수

[미적분Ⅰ]
무한수열의 극한
함수의 극한과 연속
미분계수
도함수
도함수의 활용

[미적분Ⅱ]
지수함수와 로그함수의 미분
삼각함수의 미분

본 단원

1. 여러 가지 미분법
함수의 몫의 미분법
합성함수의 미분법
역함수의 미분법
이계도함수

2. 도함수의 활용
접선의 방정식
함수의 그래프
방정식과 부등식에의 활용

후속 학습

[미적분Ⅱ]
적분법

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~2	106~107	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 여러 가지 미분법	중단원 도입		108	• 움직이는 동안은 같은 소리도 다르게 들린다.	
	01 함수의 몫의 미분법		109~111	• 함수의 몫의 미분법 • $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수	
	02 합성함수의 미분법	3	112~113	• 합성함수의 미분법	
	03 역함수의 미분법	4~8	114~120	• 역함수의 미분법 • 복잡한 함수의 미분	
	04 이계도함수	9	121~122	• 이계도함수	이계도함수, $f''(x)$, y'', $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$
	수준별 학습	10	123~125	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 도함수의 활용	중단원 도입	11	126	• 아르키메데스의 ‘거울 무기’	
	01 접선의 방정식		127~129	• 접선의 방정식	
	02 함수의 그래프	12~16	130~137	• 곡선의 오목과 볼록 • 변곡점의 판정 • 이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정 • 함수의 그래프의 개형 • 구간에서의 함수의 최댓값, 최솟값	변곡점
	03 방정식과 부등식에의 활용	17~18	138~140	• 도함수를 이용한 방정식의 실근의 개수 구하기 • 도함수를 이용한 부등식의 증명	
	수준별 학습	19	141~143	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		20~21	144~149	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 미분법의 역사

미분법은 17세기에 영국의 뉴턴(Newton, I ; 1642~1727)과 독일의 라이프니츠(Leibniz, G. W ; 1646~1716)에 의해서 발명되었다. 뉴턴은 물리학에서 움직이는 물체의 운동을 설명하기 위하여 미분을 발견하였고, 라이프니츠는 함수의 그래프의 개형을 그리기 위하여 미분을 발견하였다. 뉴턴과 라이프니츠는 극한 개념을 도입하여 미분을 발견하였으나 아직 극한 개념이 명확하지 않아서 미분법은 하나의 계산 기술로서만 발전하였다. 그리스 인들이 원의 넓이를 구하기 위하여 무한을 도입하였으나 제논(Zenon ; ?B.C. 490~?B.C. 425)의 역설에서도 잘 나타난 바와 같이 무한의 개념은 취급하기가 곤란한 것이었다. '수학은 무한의 본질을 규명하는 과학이다'라는 말은 현대 수학의 특징을 잘 나타내고 있다.

미분학이 오늘날과 같은 형태를 갖추게 된 것은 코시(Cauchy, A. L. ; 1789~1857)가 극한의 개념을 학문적으로 체계화하고, 데데킨트(Dedekind, J. W. R ; 1831~1916)와 칸토어(Cantor, G. ; 1845~1918)가 실수에 대한 이론을 엄밀하게 다듬어 놓은 19세기 이후이다.

뉴턴은 미분을 나타낼 때 $\dot{x}$, $\ddot{x}$와 같은 기호를 사용하였는데 이러한 기호가 물리학에서는 오늘날에도 사용되고 있다. 수학에서는 미분을 나타낼 때 라이프니츠가 발명한 $\dfrac{dy}{dx}$와 라그랑주(Lagrange, J. L. ; 1736~1813)가 발명한 $f'(x)$, y'과 같은 기호가 주로 사용되고 있다.

미분을 이용하면 움직이는 물체의 속도와 가속도를 구할 수 있을 뿐만 아니라 이차함수, 삼차함수 등 여러 가지 함수의 그래프를 그리고, 방정식과 부등식에 활용할 수도 있다. 또한 삼각함수, 지수함수, 로그함수의 미분을 이용하면 다항함수가 아닌 함수들을 다항함수로 근사시킬 수도 있으며, 이것을 이용하면 sin 0.1, $\sqrt[5]{e}$ 등의 근삿값을 구할 수도 있다.

2. 코시의 평균값 정리

코시

프랑스의 수학자 코시(Cauchy, A. L. ; 1789~1857)는 평균값 정리를 다음과 같이 일반화하였다.

「두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $g'(x)\neq 0$이면 열린 구간 $(a,\ b)$에 점 c가 적어도 하나 존재하여 $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$를 만족시킨다.」

이 정리에서 $g(b)-g(a)=0$이면 이 정리는 의미가 없다.

$g(b)=g(a)$라고 가정하면 $g(x)$는 롤의 정리의 조건을 만족하므로 열린 구간 $(a,\ b)$의 적당한 x에 대해 $g'(x)=0$을 만족하는데 이는 정리의 가정 $g'(x)\neq 0$에 모순이므로 $g(b)\neq g(a)$이다.

함수 $F(x)$를

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\{g(x)-g(a)\}$$

로 정리하면 $F(x)$는 가정에 의하여 평균값의 가정의 조건을 만족시킨다. 또, $F(a)=F(b)=0$이므로 $h'(c)=0$을 만족시키는 c가 열린 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다. 따라서

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

$x=c$를 대입하면 $g'(c)\neq 0$이므로

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$ 이다.

3. 극대, 극소를 구하는 페르마의 방법

뉴턴 이전의 미분에 관한 연구로는 페르마(Fermat, P. ; 1601～1665)가 고안한 다항함수 $f(x)$의 극대점과 극소점을 찾아내는 페르마의 방법이 있다.


페르마

페르마는 극대점과 극소점에서는 접선이 수평이 되어야 한다는 사실에 착안하여 다음 식을 생각하였다.

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E}=0$$

좌변의 분자를 전개하여 E로 나눈 다음 $E=0$으로 놓고 방정식을 풀어서 극점의 x좌표를 구하였다. 이것은 결국 다음을 만족시키는 x를 구한 것과 같다.

$$f'(x)=\lim_{E\to 0}\frac{f(x+E)-f(x)}{E}=0$$

4. 뉴턴의 미분법

동점 P가 움직인 거리 x와 걸린 시간 t 사이에 $x=t^3$의 관계가 있을 때 점 P의 속도를 구하기 위하여 뉴턴은 다음과 같은 방법을 사용하였다.


뉴턴

작은 증가를 0을 써서 나타내면 시간 t가 t_0에서 t_0+0이 될 때 점 P가 움직인 거리 x는 t_0^3에서 $(t_0+0)^3=t_0^3+3\cdot t_0^2\cdot 0+3\cdot t_0\cdot 0^2+0^3$이 된다. 이때, t가 0만큼 증가할 때 움직인 거리는 $3t_0^2\cdot 0+3t_0\cdot 0^2+0^3$이므로 움직인 거리와 증가한 양의 비는 다음과 같다.

$$(3t_0^2\cdot 0+3t_0\cdot 0^2+0^3):0=(3t_0^2+3t_0\cdot 0+0^2):1 \qquad \cdots\cdots ①$$

㉠의 우변에서 0은 한없이 작다고 생각하여 0이 곱해진 항을 없애면 $3t_0^2:1$이 되므로 점 P의 시간 t_0에서의 속도는 $3t_0^2$이다.

5. 로피탈 정리와 부정형의 극한

함수의 극한에 관한 성질에 의하면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$와 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$가 존재하고 $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$이면 다음이 성립한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$$

그러나 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$과 같이 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$일지라도 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$가 존재하는 경우도 있다. 이와 같이 부정형의 극한을 구할 때, 미분을 이용하면 편리하다. 이때, 로피탈(L'Hopital, G. F. A. M. ; 1661～1704) 정리가 사용된다.

> **로피탈 정리**
>
> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$를 포함하는 구간에서 연속이고, 이 구간의 a를 제외한 모든 x에서 미분가능하며 $f(a)=g(a)=0$을 만족한다고 하자.
>
> 이때, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$가 존재하면 다음이 성립한다.
>
> $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

예 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-x^3}{x^3+2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6x-3x^2}{3x^2+4x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-6x}{6x+4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$

위와 같은 로피탈 정리는 반복하여 사용할 수 있고 다음과 같은 꼴의 부정형인 경우에도 성립한다.

예 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x+5}{2x+7}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3}{2}=-\dfrac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{e^x}=0$

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

<table>
<tr><td colspan="2">대단원</td><td>Ⅲ. 미분법</td><td>쪽수</td><td>교과서 106~110쪽</td></tr>
<tr><td colspan="2">소단원</td><td>1. 여러 가지 미분법 1-1 함수의 몫의 미분법</td><td>차시</td><td>1/21</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td colspan="3">함수의 몫의 미분법을 이해한다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>학습 과정</td><td colspan="2">교수 · 학습 활동</td><td>교수 · 학습상의 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>선수 학습 확인
동기 유발

학습 목표 제시</td><td colspan="2">준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다.
중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다.
이번 차시의 학습 목표를 제시한다.
• 함수의 몫의 미분법을 이해한다.</td><td></td></tr>
<tr><td>전개</td><td>탐구 활동

개념 학습

문제 해결</td><td colspan="2">탐구 활동을 해결하도록 한다.
탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다.
학습 내용 설명
• 함수의 몫의 미분법
미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$, $(g(x) \neq 0)$에 대하여
(1) $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
(2) $\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$
예제 01을 설명한다.
문제 1번을 풀게 한다.
정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.</td><td></td></tr>
<tr><td>정리</td><td>학습 내용 정리
차시 예고</td><td colspan="2">본시의 학습 내용을 정리한다.
다음 차시를 예고한다.
• n이 음의 정수일 때 $y=x^n$의 도함수와 삼각함수의 도함수에 대하여 알아본다.</td><td></td></tr>
</table>

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅲ. 미분법		쪽수	교과서 110~111쪽
소단원	1. 여러 가지 미분법 1-1 함수의 몫의 미분법		차시	2/21
학습 목표	함수 $y=x^n$ (n은 음의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.			
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 $y=x^n$ (n은 음이 아닌 정수)의 도함수를 말하여 보자. ◐ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 함수 $y=x^n$ (n은 음의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.		
전개	개념 학습 문제 해결	◐ 학습 내용 설명 • **함수 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수** n이 정수일 때, $y=x^n$이면 $y'=nx^{n-1}$ ◐ 예제 02를 설명한다. ◐ 문제 2, 3번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다. ◐ 단원 과제를 해결하도록 한다. 단원 과제의 해결 과정을 발표하게 하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 합성함수의 미분법에 대하여 알아본다.		

1 여러 가지 미분법

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 함수의 몫을 미분할 수 있게 한다.
② 합성함수를 미분할 수 있게 한다.
③ 역함수를 미분할 수 있게 한다.
④ 이계도함수를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 함수의 몫의 미분법	함수의 몫의 미분법
	$y=x^n$(n은 정수)의 도함수
02 합성함수의 미분법	합성함수의 미분법
03 역함수의 미분법	역함수의 미분법
	복잡한 함수의 미분
04 이계도함수	이계도함수
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

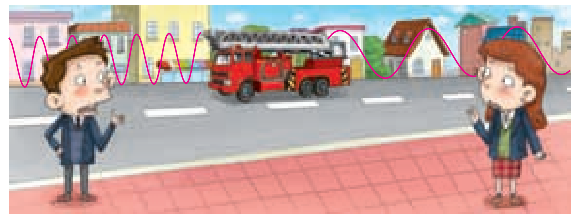
교과서 108 쪽

1 여러 가지 미분법

움직이는 동안은 같은 소리도 다르게 들린다.

빠르게 다가왔다가 멀어지는 소방차의 사이렌 소리가 다르다는 것을 느껴 본 적이 있을 것이다. 실제로 빠르게 다가오는 소방차의 사이렌 소리는 높은 음으로 들리고, 멀어지는 소방차의 사이렌 소리는 낮은 음으로 들린다. 소리는 파동의 형태로 우리의 귀에 전달되는데, 소리를 내는 소방차의 사이렌이나 소리를 듣는 사람이 이동하면 소리의 파동 모양이 변화된 형태로 우리의 귀로 전달되기 때문이다.

즉, 소리를 내는 물체와 듣는 사람이 가까워지면 소리의 파장이 짧아져 높은 음의 소리로 들리고, 소리를 내는 물체로부터 듣는 사람이 멀어지면 소리의 파장이 길어져 낮은 음의 소리로 들린다.



이러한 현상을 '도플러 효과'라고 하는데, 도플러 효과는 소리를 내는 물체와 듣는 사람이 접근하는 속도가 클수록 커진다고 한다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 111 쪽

빠르게 지나가는 소방차의 사이렌 소리의 진동수는 어떻게 변할까?

들어가면서 자연현상, 사회현상 등은 다항함수, 지수함수, 삼각함수 등 단편적인 함수로만 이해하거나 설명할 수 없는 경우가 많다. 이 단원에서는 복잡한 형태의 함수를 자유롭게 미분하는 능력을 기르고, 여러 가지 현상을 이해하고 설명할 수 있는 능력을 함양할 수 있도록 다양한 함수의 도함수를 기본으로 하여 함수의 몫, 합성함수, 역함수의 미분법, 이계도함수를 지도한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 함수의 몫을 미분할 수 있다.	상	$\tan x$를 포함한 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 꼴의 함수를 미분할 수 있다.
	중	$\dfrac{1}{g(x)}$ 꼴의 함수를 미분할 수 있다.
	하	$y=x^n$ (n은 정수)의 도함수를 구할 수 있다.
2. 합성함수를 미분할 수 있다.	상	합성함수를 미분할 수 있다.
	중	$y=\{f(x)\}^n$에서 $f(x)$가 다항함수, $\sin x$, $\ln x$, e^x인 경우와 같은 간단한 합성함수를 미분할 수 있다.
	하	$y=x^n$(n은 실수)의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$임을 말할 수 있다.
3. 역함수를 미분할 수 있다.	상	역함수를 미분할 수 있다.
	중	역함수의 미분법을 이용하여 $x=y^n$ (n은 자연수)의 $\dfrac{dy}{dx}$를 구할 수 있다.
	하	$x=y^n$ (n은 자연수)의 $\dfrac{dx}{dy}$를 구할 수 있다.
4. 이계도함수를 구할 수 있다.	상	이계도함수를 구할 수 있다.
	중	$y=\sin x$, $y=\ln x$, $y=(2x+1)^n$인 경우와 같은 간단한 함수의 이계도함수를 구할 수 있다.
	하	다항함수의 이계도함수를 구할 수 있다.

교과서 109 쪽

01 함수의 몫의 미분법

● 함수의 몫을 미분할 수 있다.

함수의 몫은 어떻게 미분하는가?

탐구 활동 기체의 부피는 압력이 낮을수록 증가한다. 즉, 기온이 일정할 때 압력을 x Pa, 기체의 부피를 y m^3라고 하면 $y=\frac{c}{x}$ (단, c는 상수)와 같이 나타낼 수 있다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy를 Δx의 식으로 나타내어 보자.
2. $\Delta x \to 0$일 때, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$의 값은 어떤 값에 가까워지는지 말하여 보자.

❶ 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$의 도함수를 구하여 보자.

x의 증분 Δx에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\begin{aligned}\Delta y &= \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\\ &=\frac{f(x+\Delta x)g(x)-f(x)g(x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\\ &=\frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}g(x)-f(x)\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{g(x+\Delta x)g(x)}\end{aligned}$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}y' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)g(x)}\\ &=\frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\cdot g(x)-f(x)\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}}{g(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)}\\ &=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}\end{aligned}$$

● 함수 $g(x)$는 미분가능하므로 연속이다.
$\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)=g(x)$

01 함수의 몫의 미분법

소단원 지도 목표

① 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법 공식을 상기하여 이용할 수 있게 한다.
② 몫으로 표현된 함수의 미분법을 이해할 수 있게 한다.
③ 몫으로 표현된 함수를 미분할 수 있게 한다.
④ n이 정수일 때, $y=x^n$의 도함수를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 몫의 미분법을 다루기 전에 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법 공식과 미분계수의 기하학적 의미와 도함수의 뜻을 상기시키고, 몇 개의 함수를 도함수의 정의에 따라 미분해 보도록 한다.

2. $\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴의 미분은 $f(x)g(x)^{-1}$로 고치면 곱의 미분법의 공식을 이용할 수 있음을 알게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 기체의 부피는 압력이 낮을수록 증가한다. 이를 관계식으로 $y=\frac{c}{x}$ (단, c는 상수)로 나타낼 수 있으며 x의 증분에 대한 y의 증분을 식으로 나타내면서 몫의 미분법을 이해하게 하려는 것이다.

1. $f(x)=\frac{c}{x}$라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{c\left(\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\right)}{\Delta x}=\frac{\frac{-c\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x}=\frac{-c}{x(x+\Delta x)}$$

2. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{-c}{x(x+\Delta x)}=-\frac{c}{x^2}$

본문 해설

❶ 도함수의 정의

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$를 이용하여 함수 $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$의 도함수를 구할 수 있게 한다.

읽/기/자/료 미분의 발견

라이프니츠는 1673년과 1676년 사이에 미적분학을 고안하여 발표하였고, 뉴턴은 1660년대 후반에 미분을 발견하였으나 발표는 늦었다. 그 이유는 뉴턴이 1669년 광학에 대한 논문을 발표한 후, 과학자들로부터 격렬한 공격을 받아 그러한 논쟁이 너무 지겨워 어떤 것도 다시는 발표하지 않으리라 맹세하였기 때문이다. 오늘날에는 두 사람이 서로 독립적으로 미적분학을 발견한 것으로 인정하고 있지만, 그 당시에는 누가 먼저 발견하였는지에 대한 논쟁이 심각하여 영국과 유럽 대륙 사이에는 수학적 교류가 끊기게 되었다.

교과서 110 쪽

❶ 특히 $f(x)=1$일 때 $f'(x)=0$이므로 $y=\dfrac{1}{g(x)}$의 도함수는 다음과 같다.

$$y'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 몫의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq 0)$에 대하여

(1) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

예제 01 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$　　(2) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

풀이 (1) $y'=\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)'=-\dfrac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$

(2) $y'=\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)'=\dfrac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{1\cdot(x^2+1)-(x-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

답 (1) $y'=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$　(2) $y'=\dfrac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$

문제 1 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $y=\dfrac{1}{x^3+x}$

(3) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$　　(4) $y=\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}$

❷ 함수의 몫의 미분법을 이용하여 n이 음의 정수일 때, 함수 $y=x^n$의 도함수를 구하여 보자.

미적분 I 도함수
$y=x^n$ (n은 양의 정수)이면
$y'=nx^{n-1}$

$n=-m$ (m은 양의 정수)이라고 하면 $y=x^n=x^{-m}=\dfrac{1}{x^m}$ 이므로

$$y'=\left(\frac{1}{x^m}\right)'=-\frac{(x^m)'}{(x^m)^2}=-\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}=nx^{n-1}$$

이다.

본문 해설

❶ $f(x)=1$인 경우는 $f'(x)=0$이고

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{g(x)}$이다.

함수 $\dfrac{1}{g(x)}$의 도함수는

$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{\{g(x)\}^2}$에

$f(x)=1$, $f'(x)=0$을 대입하면

$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$ 이다.

1

목표 | 몫의 미분법 공식을 이용하여 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 꼴의 함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $y'=\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'=-\dfrac{(x^2)'}{(x^2)^2}$

$=-\dfrac{2x}{x^4}=\boldsymbol{-\dfrac{2}{x^3}}$

(2) $y'=\left(\dfrac{1}{x^3+x}\right)'=-\dfrac{(x^3+x)'}{(x^3+x)^2}=\boldsymbol{-\dfrac{3x^2+1}{(x^3+x)^2}}$

(3) $y'=\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)'$

$=\dfrac{(2x)'(x^2+1)-(2x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\boldsymbol{\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}}$

(4) $y'=\left(\dfrac{x^2}{x^2+2x+1}\right)'$

$=\dfrac{(x^2)'(x^2+2x+1)-(x^2)(x^2+2x+1)'}{(x^2+2x+1)^2}$

$=\dfrac{2x(x^2+2x+1)-x^2(2x+2)}{(x+1)^4}$

$=\dfrac{2x^2+2x}{(x+1)^4}=\dfrac{2x(x+1)}{(x+1)^4}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2x}{(x+1)^3}}$

본문 해설

❷ $y=x^n$일 때, $y'=nx^{n-1}$

n이 정수인 경우 몫으로 표현된 함수의 미분법에 의해 성립함을 증명할 수 있다.

함수 $g(x)=x^m$(m은 자연수)이라고 하면

$(x^{-m})'=\left(\dfrac{1}{x^m}\right)'=-\dfrac{(x^m)'}{(x^m)^2}$

$=-\dfrac{mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{m-1-2m}=(-m)x^{-m-1}$

이때 $n=-m$ (m은 자연수)으로 놓으면 음의 정수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$(x^n)'=(x^{-m})'=(-m)x^{-m-1}=nx^{n-1}$$

한편 $n=0$일 때는 다음이 성립한다.

$$(x^n)'=(x^0)'=(1)'=0=0x^{0-1}=nx^{n-1}$$

또한 n이 양의 정수일 때는 $(x^n)'=nx^{n-1}$이 성립한다.

따라서 n이 정수일 때, $(x^n)'=nx^{n-1}$이 성립한다.

교과서 111 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

$n=0$이면 $y=x^0=1$이고 $y'=0=0\cdot x^{0-1}$으로 표현할 수 있다.

함수 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수

n이 정수일 때, $y=x^n$이면 $y'=nx^{n-1}$

보기 (1) $(x^{-3})'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$

(2) $\left(\dfrac{1}{x^6}\right)'=(x^{-6})'=-6x^{-6-1}=-\dfrac{6}{x^7}$

문제 2 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=2x^{-2}$ (2) $y=\dfrac{3}{x^5}$ (3) $y=\dfrac{x^4+x^2+1}{x^3}$

함수의 몫의 미분법을 이용하여 삼각함수의 도함수를 구하여 보자.

예제 02 함수 $y=\tan x$의 도함수를 구하여라.

풀이 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$ 답 $y'=\sec^2 x$

문제 3 다음 등식이 성립함을 보여라.

(1) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(2) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(3) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

소방차가 사이렌을 울리며 v m/s의 속도로 도로를 달리고 있다. 소방차가 다가올 때 사람이 듣는 사이렌 소리의 진동수를 F_1 Hz, 소방차가 멀어질 때 사람이 듣는 사이렌 소리의 진동수를 F_2 Hz라고 하면

$$F_1=\frac{132400}{340-v},\ F_2=\frac{132400}{340+v}$$

이 성립한다고 한다. 이 소방차의 속도에 대한 사이렌 소리의 진동수의 변화율 $\dfrac{dF_1}{dv}$, $\dfrac{dF_2}{dv}$를 구하여라.

2

목표| 함수 $y=x^n$ (n은 정수)의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(2x^{-2})'=2\cdot(-2x^{-2-1})=-\mathbf{\dfrac{4}{x^3}}$

(2) $y'=\dfrac{3}{x^5}=3x^{-5}$이므로

$y'=(3x^{-5})=3(-5x^{-5-1})=-\mathbf{\dfrac{15}{x^6}}$

(3) $y'=\{(x^4+x^2+1)x^{-3}\}'$

$=(x^4+x^2+1)'x^{-3}+(x^4+x^2+1)(x^{-3})'$

$=\dfrac{4x^3+2x}{x^3}-\dfrac{3(x^4+x^2+1)}{x^4}$

$=\mathbf{1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}}$

3

목표| 몫의 미분법을 이용하여 삼각함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(\csc x)'=\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$

$=\mathbf{-\csc x\cdot\cot x}$

(2) $(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\mathbf{\sec x\cdot\tan x}$

(3) $(\cot x)'=\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)'=\dfrac{-\sec^2 x}{\tan^2 x}=\mathbf{-\csc^2 x}$

지/도/자/료

함수 $f(x)$의 미분가능성은 주로 열린 구간 $(a,\ b)$에서 다루지만 닫힌 구간 $[a,\ b]$에 대해서도 정의할 수 있다. 먼저, 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌미분계수와 우미분계수를 다음과 같이 정의해 보자.

좌미분계수: $\displaystyle\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_-(a)$

우미분계수: $\displaystyle\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_+(a)$

좌미분계수와 우미분계수가 같을 때 즉, $f'_-(a)=f'_+(a)$일 때, $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$로 나타내고, 이 값을 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 미분계수라고 한다.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 미분가능하려면 다음 세 조건을 만족해야 한다.

(i) 열린 구간 $(a,\ b)$의 임의의 c에서 $f'(c)$가 존재한다.

(ii) $x=a$에서는 우미분계수 $f'_+(a)$가 존재한다.

(iii) $x=b$에서는 좌미분계수 $f'_-(b)$가 존재한다.

단원 과제

목표| 몫의 미분법을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{dF_1}{dv}=\dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{132400}{340-v}\right)$

$=-\dfrac{132400(340-v)'}{(340-v)^2}=\mathbf{\dfrac{132400}{(340-v)^2}}$

$\dfrac{dF_2}{dv}=\dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{132400}{340+v}\right)$

$=-\dfrac{132400(340+v)'}{(340+v)^2}=\mathbf{-\dfrac{132400}{(340+v)^2}}$

02 합성함수의 미분법

소단원 지도 목표

① 합성함수의 미분법을 이해할 수 있게 한다.
② 합성함수를 미분할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 합성함수의 미분법에 의하여 $y=f(ax+b)$, $y=\{f(x)\}^n$ 꼴의 함수를 편리하게 미분할 수 있음을 주지시킨다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 합성함수를 미분한 식 $\dfrac{dy}{dx}$가 $\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$와 같아짐을 알고 $\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$를 이용하여 간단한 두 도함수의 곱으로 복잡한 함수의 도함수를 구하여 보는 활동이다.

교과서 112 쪽

02 합성함수의 미분법

● 합성함수를 미분할 수 있다.

합성함수는 어떻게 미분하는가?

탐구 활동 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+1$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 합성함수 $y=f(g(x))$를 구하고, 도함수 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하여 보자.

2. $y=f(u)$, $u=g(x)$라고 할 때, $\dfrac{dy}{du}$와 $\dfrac{du}{dx}$를 구하여 보자.

3. **2**의 결과를 이용하여 $\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$를 계산하고, 이를 x에 대한 식으로 나타내어 보자.

4. $\dfrac{dy}{dx}$와 $\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$를 비교하여 보자.

미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수를 구하여 보자.

$u=g(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 u의 증분을 Δu라 하고, $y=f(u)$에서 u의 증분 Δu에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\ (\text{단, } \Delta u\neq 0)$$

이다. 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$

이다. 그런데 미분가능한 함수 $u=g(x)$는 연속이므로 $\Delta x\to 0$이면 $\Delta u\to 0$이다.

● 함수 $u=g(x)$는 연속이므로
$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u$
$=\lim_{\Delta x\to 0}\{g(x+\Delta x)-g(x)\}$
$=g(x)-g(x)=0$

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}(4x^2+4x+1)=\boldsymbol{8x+4}$

2. $\dfrac{dy}{du}=\boldsymbol{2u}$, $\dfrac{du}{dx}=\boldsymbol{2}$

3. $\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=4u=4(2x+1)=\boldsymbol{8x+4}$

4. $\boldsymbol{\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}}$

지/도/자/료 합성함수 미분법의 또 다른 증명

$\varepsilon_1=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-g'(x)$라 하면

$\Delta u=g'(x)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x$

$\varepsilon_2=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}-f'(u)$라 하면

$\Delta y=f'(x)\Delta u+\varepsilon_2\Delta u$

$\Delta x=0$일 때, $\varepsilon_1=0$,

$\Delta u=0$일 때, $\varepsilon_2=0$으로 정의하면

$\Delta u=g'(x)\Delta x+\varepsilon_1\Delta x$,

$\Delta y=f'(u)\Delta u+\varepsilon_2\Delta u$

(여기서 $\Delta x\to 0$일 때, $\varepsilon_1\to 0$, $\Delta u\to 0$일 때, $\varepsilon_2\to 0$)

이고, ε_1과 ε_2는 각각 Δx와 Δu에 대한 연속함수이다.

한편

$$\begin{aligned}\Delta y&=f'(u)\Delta u+\varepsilon_2\Delta u\\&=\{f'(u)+\varepsilon_2\}\Delta u\\&=\{f'(u)+\varepsilon_2\}\{g'(x)+\varepsilon_1\}\Delta x\end{aligned}$$

이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\{f'(u)+\varepsilon_2\}\{g'(x)+\varepsilon_1\}$$

$\Delta x\to 0$이면 $\Delta u\to 0$, 즉 $\Delta x\to 0$이면 $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$이므로

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\{f'(u)+\varepsilon_2\}\{g'(x)+\varepsilon_1\}\\&=f'(u)g'(x)=f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

교과서 113 쪽

여기서 $\dfrac{dy}{du}=f'(u)$, $\dfrac{du}{dx}=g'(x)$이고, $u=g(x)$이므로

$$y'=f'(u)g'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

이다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

합성함수의 미분법을 연쇄 법칙(chain rule)이라고 부르기도 한다.

합성함수의 미분법

미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$도 미분가능하며, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{ 또는 } y'=f'(g(x))g'(x)$$

예제 01 합성함수의 미분법을 이용하여 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(x^2+7)^5$ (2) $y=\dfrac{1}{(2x+1)^3}$

풀이 (1) $u=x^2+7$로 놓으면 $y=u^5$이므로 $\dfrac{dy}{du}=5u^4$, $\dfrac{du}{dx}=2x$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=5u^4\cdot 2x=10x(x^2+7)^4$$

(2) $u=2x+1$로 놓으면 $y=u^{-3}$이므로 $\dfrac{dy}{du}=-3u^{-4}=-\dfrac{3}{u^4}$, $\dfrac{du}{dx}=2$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{3}{u^4}\cdot 2=-\frac{6}{(2x+1)^4}$$

답 (1) $y'=10x(x^2+7)^4$ (2) $y'=-\dfrac{6}{(2x+1)^4}$

문제 1 합성함수의 미분법을 이용하여 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(5-x)^3$ (2) $y=(x^2+3x)^5$

(3) $y=\dfrac{1}{(4-x)^2}$ (4) $y=\dfrac{1}{(x^2-x+1)^3}$

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립함을 설명하여 보자.

(1) $\{f(ax+b)\}'=af'(ax+b)$ (단, a, b는 실수)

(2) $y=\{f(x)\}^n$일 때, $y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ (단, n은 정수)

1

목표| 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $u=5-x$로 놓으면 $y=u^3$이므로

$$\frac{dy}{du}=3u^2,\ \frac{du}{dx}=-1$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\cdot(-1)$$

$$=-3u^2=\mathbf{-3(5-x)^2}$$

(2) $u=x^2+3x$로 놓으면 $y=u^5$이므로

$$\frac{dy}{du}=5u^4,\ \frac{du}{dx}=2x+3$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=5u^4(2x+3)$$

$$=\mathbf{5(x^2+3x)^4(2x+3)}$$

(3) $u=4-x$로 놓으면 $y=u^{-2}$이므로

$$\frac{dy}{du}=-\frac{2}{u^3},\ \frac{du}{dx}=-1$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{2}{u^3}\cdot(-1)$$

$$=\frac{2}{u^3}=\mathbf{\frac{2}{(4-x)^3}}$$

(4) $u=x^2-x+1$로 놓으면 $y=u^{-3}$이므로

$$\frac{dy}{du}=-\frac{3}{u^4},\ \frac{du}{dx}=2x-1$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-\frac{3}{u^4}\cdot(2x-1)$$

$$=\mathbf{\frac{-3(2x-1)}{(x^2-x+1)^4}}$$

사고력 기르기 추론

출제 의도| 합성함수의 미분법에 의하여 $y=f(ax+b)$, $y=\{f(x)\}^n$의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $u=ax+b$로 놓으면 $\dfrac{du}{dx}=a$

$$\{f(ax+b)\}'$$

$$=\frac{d}{dx}f(ax+b)=\frac{d}{du}f(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=f'(u)\cdot a=\mathbf{af'(ax+b)}$$

(2) $u=f(x)$로 놓으면 $y=u^n$이고 $\dfrac{du}{dx}=f'(x)$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=n\cdot u^{n-1}\cdot f'(x)=\mathbf{n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)}$$

지/도/자/료

합성함수의 미분법은 3개 이상의 함수의 합성에 대하여도 적용할 수 있다. 즉,

$$(f\circ g\circ h)'(x)=\{f(g(h(x)))\}'$$

$$=f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$$

03 역함수의 미분법

소단원 지도 목표

① 역함수의 미분법을 이해할 수 있게 한다.
② 역함수를 미분할 수 있게 한다.
③ $y=x^r$ (r는 유리수)이면 $y'=rx^{r-1}$임을 알게 한다.
④ 몫의 미분법, 합성함수의 미분법을 이용하며 복잡한 함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.
⑤ 로그함수의 미분법을 이용하여 $y=x^a$ (a는 실수)이면 $y'=ax^{a-1}$임을 알게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 역함수의 미분법은 역함수를 구하지 않고도 미분할 수 있는 편리한 방법임을 강조한다.

2. 역함수의 미분법을 이용할 때 $y=$(x에 대한 식)을 변형하여 $x=$(y에 대 한 식)에서 $\dfrac{dx}{dy}$를 구하여 $\dfrac{dy}{dx}$, 즉 주어진 함수를 미분함을 이해하게 한다.

교과서 114 쪽

03 역함수의 미분법

● 역함수를 미분할 수 있다.

역함수는 어떻게 미분하는가?

생각 열기

탐구 활동 **일차함수 $f(x)=ax+b$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$를 구하여 보자.
2. 함수 $f(x)$와 $f^{-1}(x)$의 도함수를 각각 구하여 보자.
3. $f(x)$의 도함수와 $f^{-1}(x)$의 도함수 사이에는 어떤 관계가 있는지 말하여 보자.

미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수를 구하여 보자.

$x=f(y)$이므로 이 함수의 도함수는 $\dfrac{dx}{dy}$이다.

함수 $y=f^{-1}(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}\ (\text{단, } \Delta y\neq 0)$$

이다. 그런데 $\Delta x\to 0$이면 $\Delta y\to 0$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

이 성립한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 함수 $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$의 도함수를 구해 보고 도함수 사이에 역수관계가 성립함을 이해하기 위한 활동이다.

1. $y=ax+b$라 하면 $x=ay+b$, $ay=x-b$

$y=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}$ $\quad$ $\boldsymbol{f^{-1}(x)=\dfrac{1}{a}x-\dfrac{b}{a}}$

2. $\boldsymbol{f'(x)=a,\ (f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{a}}$

3. $f(x)$의 도함수와 $(f^{-1})(x)$의 도함수는

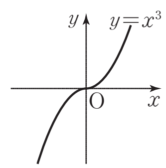
$f'(x)=\dfrac{1}{(f^{-1})'(x)}$과 같이 역수 관계임을 추측할 수 있다.

지/도/자/료

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$가 존재하면 그 역함수도 미분가능하고 다음이 성립한다.

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\ (\text{단, } f'(f^{-1}(x))\neq 0)$$

예를 들어 함수 $f(x)=x^3$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 증가함수이고, $f^{-1}(x)$가 존재한다. 이때, $f(2)=8$이므로 다음이 성립한다.



$$(f^{-1})'(8)=\frac{1}{f'(f^{-1}(8))}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{3\cdot 2^2}=\frac{1}{12}$$

이처럼 $(f^{-1})'(8)$을 구할 때, 역함수의 미분법을 이용하면 $f^{-1}(x)$를 구하지 않고도 역함수의 미분계수를 구할 수 있다.

교과서 115 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

역함수의 미분법

함수 $f(x)$가 미분가능하고, 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

예제 01 역함수의 미분법을 이용하여 함수 $y=\sqrt{x}$를 미분하여라.

풀이 $y=\sqrt{x}$에서 $x=y^2$이므로 $\frac{dx}{dy}=2y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

답 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

문제 1 역함수의 미분법을 이용하여 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\sqrt[3]{x}$ (2) $y=\sqrt[4]{3x-6}$

정수 n에 대하여 $y=x^n$의 도함수는 $y'=nx^{n-1}$임을 알고 있다. 이제 r가 유리수일 때, 함수 $y=x^r$의 도함수를 구하여 보자.

n이 0이 아닌 정수일 때, $y=x^{\frac{1}{n}}$의 양변에 n제곱하면 $x=y^n$이고, $\frac{dx}{dy}=ny^{n-1}$이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{ny^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$$

이다.

한편 $r=\frac{m}{n}$ (m, n은 정수, $n\neq0$)으로 놓으면 $y=x^r=x^{\frac{m}{n}}$이므로 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}x^r=\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{n}})^m=m(x^{\frac{1}{n}})^{m-1}\cdot(x^{\frac{1}{n}})'$$
$$=mx^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}=rx^{r-1}$$

이다.

1

목표 | 역함수의 미분법을 이용하여 $\frac{dy}{dx}$를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $y=\sqrt[3]{x}$에서 $x=y^3$이므로 $\frac{dx}{dy}=3y^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2}=\mathbf{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

(2) $y=\sqrt[4]{3x-6}$에서 $3x-6=y^4$, $x=\frac{y^4+6}{3}$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{4}{3}y^3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\frac{4}{3}y^3}=\mathbf{\frac{3}{4\sqrt[4]{(3x-6)^3}}}$$

지/도/자/료

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$가 존재하고 미분가능하면

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

(단, $f'(f^{-1}(y))\neq0$)

이 성립함을 알아보자.

$h=f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)$로 놓으면

$$f^{-1}(y+k)=f^{-1}(y)+h=x+h$$

이므로

$$f(x+h)=y+k,\ k=f(x+h)-f(x)$$

따라서 $\frac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k}=\frac{h}{f(x+h)-f(x)}$

여기서 $f(x)$는 연속함수이므로 $f^{-1}(y)$도 연속이고, $k\to0$일 때 $h\to0$이다.

그러므로

$$(f^{-1})'(y)=\lim_{k\to0}\frac{f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)}{k}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h}{f(x+h)-f(x)}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$
$$=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

(단, $f'(f^{-1}(y))\neq0$)

읽/기/자/료 매스매티카

수치 계산(numerical computation)은 물론 기호 계산(symbolic computation)과 그래픽 기능을 가지고 있는 매스매티카(Mathematica)는 미국 일리노이대학에서 개발한 소프트웨어이다.

'컴퓨터로 수학을 하기 위한 체계(a system for doing mathematics by computer)' 또는 '수학과 그 응용을 위한 다목적 소프트웨어(general softare system for mathematics and other application)'라고도 불리는 매스매티카는 1988년에 최초로 개발되었다. 현재는 기능이 보다 향상되어 미분과 적분의 계산은 물론 미분방정식, 정수론, 행렬과 행렬식, 통계학, 3D 그래픽, 애니메이션 등에 널리 쓰이고 있다.

2

목표| $y=x^r$ (r유리수)이면 $y'=rx^{r-1}$임을 이용하여 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=x^2\sqrt{x}=x^{\frac{5}{2}}$이므로

$$y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\mathbf{\frac{5}{2}\sqrt{x^3}}$$

(2) $y=\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$이므로

$$y'=\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1}$$

$$=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}=\mathbf{\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}}$$

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}=x^{-\frac{2}{5}}$이므로

$$y'=-\frac{2}{5}x^{-\frac{2}{5}-1}$$

$$=-\frac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}=\mathbf{-\frac{2}{5\sqrt[5]{x^7}}}$$

교과서 116 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^r$ (r는 유리수)의 도함수

r가 유리수일 때, $y=x^r$이면 $y'=rx^{r-1}$

보기 (1) $(x\sqrt{x})'=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

(2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)'=(x^{-\frac{2}{3}})'=-\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$

문제 2 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x^2\sqrt{x}$ (2) $y=\sqrt[4]{x^3}$ (3) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

예제 02 함수 $y=\sqrt[3]{4-x^3}$의 도함수를 구하여라.

풀이 $y'=(\sqrt[3]{4-x^3})'=\{(4-x^3)^{\frac{1}{3}}\}'=\frac{1}{3}(4-x^3)^{\frac{1}{3}-1}\cdot(4-x^3)'$

$=\frac{1}{3}(4-x^3)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-3x^2)=-\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(4-x^3)^2}}$

답 $y'=-\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(4-x^3)^2}}$

문제 3 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=\sqrt[3]{(2x+1)^5}$ (2) $y=\sqrt{2x-x^2}$

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

윤아와 승현이 중 누가 답을 맞혔는지 말하고, 그 이유를 설명하여 보자.

3

목표| $y=x^r$ (r유리수)이면 $y'=rx^{r-1}$과 합성함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(\sqrt[3]{(2x+1)^5})'$

$$=\left\{(2x+1)^{\frac{5}{3}}\right\}'$$

$$=\frac{5}{3}(2x+1)^{\frac{2}{3}}(2x+1)'$$

$$=\mathbf{\frac{10}{3}\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$$

(2) $y'=(\sqrt{2x-x^2})'$

$$=\left\{(2x-x^2)^{\frac{1}{2}}\right\}'$$

$$=\frac{1}{2}(2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x-x^2)'$$

$$=\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\mathbf{\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}}$$

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 함수 $f(x)$의 도함수의 역함수와 역함수의 도함수는 서로 다른 함수임을 알게 한다.

풀이| 승현이가 답을 맞혔다.

예 함수 $f(x)=e^x$일 때, $f'(x)=e^x$이므로

$\{f'(x)\}^{-1}=\ln x$

한편 $f^{-1}(x)=\ln x$이므로

$\{f^{-1}(x)\}'=\dfrac{1}{x}$

따라서 $\{f'(x)\}^{-1}\neq\{f^{-1}(x)\}'$

교과서 117 쪽

복잡한 함수는 어떻게 미분하는가?

몫의 미분법, 합성함수의 미분법 등을 이용하면 복잡한 함수의 도함수를 구할 수 있다. 먼저 지수함수와 로그함수가 포함된 함수의 도함수를 구하여 보자.

예제 03 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{e^x}{e^x-1}$ (2) $y=2^{3x+2}$

풀이 (1) $y'=\dfrac{(e^x)'(e^x-1)-e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}=\dfrac{e^x(e^x-1)-e^x\cdot e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}$

(2) $u=3x+2$로 놓으면 $y=2^u$

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=(2^u\ln 2)\cdot 3=3\cdot 2^{3x+2}\ln 2$

답 (1) $y'=\dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2}$ (2) $y'=3\cdot 2^{3x+2}\ln 2$

문제 4 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=e^{x^2+x+1}$ (2) $y=\dfrac{e^x}{x}$

(3) $y=3^{-2x+1}$ (4) $y=\dfrac{3^{2x}}{x}$

예제 04 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{\ln x}{\ln x+1}$ (2) $y=\log_3(x^2+1)$

$(\log_a f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$

풀이 (1) $y'=\dfrac{(\ln x)'(\ln x+1)-(\ln x)(\ln x+1)'}{(\ln x+1)^2}=\dfrac{\dfrac{\ln x+1}{x}-\dfrac{\ln x}{x}}{(\ln x+1)^2}=\dfrac{1}{x(\ln x+1)^2}$

(2) $u=x^2+1$로 놓으면 $y=\log_3 u$

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u\ln 3}\cdot 2x=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$

답 (1) $y'=\dfrac{1}{x(\ln x+1)^2}$ (2) $y'=\dfrac{2x}{(x^2+1)\ln 3}$

문제 5 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{2\ln x}{x}$ (2) $y=\ln 3x$

(3) $y=\log_2(5x+3)$ (4) $y=\dfrac{1}{\log_2 3x}$

4

목표| 몫의 미분법, 합성함수의 미분법을 이용하여 지수함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(e^{x^2+x+1})'=(x^2+x+1)'e^{x^2+x+1}$

$=\boldsymbol{e^{x^2+x+1}(2x+1)}$

(2) $y'=\left(\dfrac{e^x}{x}\right)'=\dfrac{(e^x)'x-e^x(x)'}{x^2}=\boldsymbol{\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}}$

(3) $u=-2x+1$로 놓으면 $y=3^u$,

$\dfrac{dy}{du}=3^u\ln 3,\ \dfrac{du}{dx}=-2$

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$=-2\cdot 3^u\ln 3=\boldsymbol{-2\cdot 3^{-2x+1}\ln 3}$

(4) $y'=\dfrac{(3^{2x})'x-3^{2x}\cdot x'}{x^2}=\dfrac{\{(2x)'3^{2x}\ln 3\}x-3^{2x}}{x^2}$

$=\dfrac{2x\cdot 3^{2x}\ln 3-3^{2x}}{x^2}=\boldsymbol{\dfrac{3^{2x}(2x\ln 3-1)}{x^2}}$

5

목표| 몫의 미분법, 합성함수의 미분법을 이용하여 로그함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=\dfrac{(2\ln x)'x-2\ln x\cdot x'}{x^2}$

$=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{x}\cdot x-2\ln x}{x^2}=\boldsymbol{\dfrac{2(1-\ln x)}{x^2}}$

(2) $u=3x$로 놓으면

$y=\ln u,\ \dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u},\ \dfrac{du}{dx}=3$

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=\dfrac{3}{u}=\dfrac{3}{3x}=\boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$

(3) $u=5x+3$으로 놓으면

$y=\log_2 u,\ \dfrac{dy}{du}=\dfrac{1}{u\ln 2},\ \dfrac{du}{dx}=5$

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$=\dfrac{1}{u\ln 2}\cdot 5=\boldsymbol{\dfrac{5}{(5x+3)\ln 2}}$

(4) $u=3x$로 놓으면 $y=\dfrac{1}{\log_2 u}$,

$\dfrac{dy}{du}=-\dfrac{(\log_2 u)'}{(\log_2 u)^2}=-\dfrac{\dfrac{1}{u\ln 2}}{(\log_2 u)^2}$

$=-\dfrac{1}{u\ln 2(\log_2 u)^2},\ \dfrac{du}{dx}=3$

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{3}{u\ln 2(\log_2 u)^2}$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{(\log_2 3x)^2 x\ln 2}}$

읽/기/자/료 미분방정식은 어디에 쓰일까?

미지수 또는 미지함수를 구하기 위한 관계가 미분으로 주어지는 방정식을 미분방정식이라고 한다.

일기 현상은 우주의 모든 물질과 마찬가지로 물리학의 기본 법칙을 따르므로 일기 예보에서는 특히 미분과 적분이 필요하다. 태풍이 불거나 비가 오는 기상 변화와 지진이 일어나고 해류가 흐르는 것 등을 분석하고 예측하기 위해서는 미분방정식을 풀어야 한다.

미분방정식은 국가의 경제에도 큰 영향을 미친다. 수학자들은 미분방정식의 이론이 금융 시장에도 잘 적용되는 것을 발견했으며 금융 시장의 흐름을 미분방정식을 통해 알 수 있게 되었다. 뉴욕의 금융 시장에서는 수천 명의 수학자들이 새로운 금융 상품을 만들어 내고 있으며, 국민 생활과 밀접한 관련이 있는 국민연금, 퇴직금, 건강보험료 등을 산출해 내고 있다.

교과서 118 쪽

1 이제 절댓값 기호가 포함된 로그함수의 도함수를 구하여 보자.

(i) $x>0$일 때, $y=\ln|x|=\ln x$이므로

$$y'=\frac{1}{x}$$

(ii) $x<0$일 때, $y=\ln|x|=\ln(-x)$이므로

$$y'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

따라서 (i), (ii)에서 $y'=\frac{1}{x}$이다.

또한 $y=\log_a|x|\,(a>0,\ a\neq1)$의 도함수는

$$y'=\left(\frac{\ln|x|}{\ln a}\right)'=\frac{(\ln|x|)'}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

절댓값이 포함된 로그함수의 미분법

(1) $y=\ln|x|$이면 $y'=\frac{1}{x}$

(2) $y=\log_a|x|$이면 $y'=\frac{1}{x\ln a}$ (단, $a>0,\ a\neq1$)

2 참고 로그함수의 도함수와 합성함수의 미분법을 이용하여 함수 $y=\ln|f(x)|$의 도함수를 구하면 $y'=(\ln|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$이다.

예제 05 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\ln|5x-3|$ (2) $y=\log_5|x^2-1|$

3 풀이 (1) $y'=(\ln|5x-3|)'=\frac{(5x-3)'}{5x-3}=\frac{5}{5x-3}$

(2) $y'=(\log_5|x^2-1|)'=\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)\ln 5}=\frac{2x}{(x^2-1)\ln 5}$

답 (1) $y'=\frac{5}{5x-3}$ (2) $y'=\frac{2x}{(x^2-1)\ln 5}$

문제 6 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\ln|\cos x|$ (2) $y=\log_2|x^2-1|$

본문 해설

1 로그함수 $y=\ln|x|$의 정의역은 로그의 정의역에 의해 $x\neq0$인 실수 전체의 집합이다. 따라서 그 도함수 $y'=\frac{1}{x}$의 정의역도 역시 $x\neq0$인 실수 전체의 집합이다.

한편, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$이고 $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$이므로 두 로그함수 $y=\ln x$, $y=\ln|x|$의 도함수가 같은 식으로 나타나지만, 그 정의역이 다름에 주의한다.

2 로그의 진수가 복잡한 형태인 경우 합성함수의 미분법과 로그함수의 도함수를 이용하여 그 도함수를 쉽게 구할 수 있음을 설명한다.

$y=\ln|f(x)|$에서 $u=f(x)$라고 하면

$$y=\ln|u|,\ \frac{dy}{du}=\frac{1}{u},\ \frac{du}{dx}=f'(x)$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{1}{u}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$$

이 식은 나중에 분수함수 $y=\frac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분을 구하는 데 필요하므로 꼭 기억해야 한다.

3 함수 $\log_a|f(x)|\,(a>0,\ a\neq1)$에서 $f(x)$가 미분가능하고 $f(x)\neq0$일 때,

$$(\log_a|f(x)|)'=\left(\frac{\ln|f(x)|}{\ln a}\right)'=\frac{(\ln|f(x)|)'}{\ln a}$$

$$=\frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$$

6

목표| 절댓값 기호가 포함된 로그함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(\ln|\cos x|)'=\frac{(\cos x)'}{\cos x}$

$$=\frac{-\sin x}{\cos x}=\mathbf{-\tan x}$$

(2) $y'=(\log_2|x^2-1|)'=\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)\ln 2}$

$$=\mathbf{\frac{2x}{(x^2-1)\ln 2}}$$

읽/기/자/료 연대 측정법

생명체에는 방사성 탄소와 보통의 탄소가 일정한 비율로 존재한다. 그러나 생명체가 죽으면 호흡과 먹이로 공급되던 탄소의 공급이 중단되므로 화석 내부에 있는 방사성 탄소의 양은 점차 감소하게 된다.

예를 들어, t년 전에 살았던 동물의 화석 내부에 있는 a g의 방사성 탄소가 y g이 되었다면

$y=ae^{kt}$(단, $k=-0.000121$)

이 성립한다고 한다. 이때, $\ln|y|=\ln|ae^{kt}|=\ln|a|+kt$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dt}=k,\ \frac{dy}{dt}=ky$$

즉, $\frac{dy}{dt}=ky$이므로 방사성 탄소가 붕괴되는 속도 $\frac{dy}{dt}$는 화석에 남아 있는 방사성 탄소의 양 y에 비례한다.

따라서 초기에는 붕괴 속도가 빠르나 오래되면 붕괴 속도가 느려지게 된다. 역으로 붕괴 속도가 남아 있는 양에 비례하는 방사능 물질에서 방사능 물질의 양 $y=y(t)$는 $\frac{dy}{dt}=ky$를 만족시킨다.

교과서 119 쪽

절댓값이 포함된 로그함수의 미분법을 활용하여 복잡한 함수의 도함수를 구하여 보자.

예제 06 함수 $y=\dfrac{(x-1)(x+1)^3}{(x+3)^2}$을 미분하여라.

풀이 양변의 절댓값에 자연로그를 취하여 정리하면

$$\ln|y|=\ln|x-1|+3\ln|x+1|-2\ln|x+3|$$

이고, 이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x+3}=\frac{2x^2+10x-4}{(x-1)(x+1)(x+3)}$$

$$y'=y\cdot\frac{2x^2+10x-4}{(x-1)(x+1)(x+3)}=\frac{(x+1)^2(2x^2+10x-4)}{(x+3)^3}$$

답 $y'=\dfrac{(x+1)^2(2x^2+10x-4)}{(x+3)^3}$

문제 7 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{x(x-2)^2}{(x-1)^3}$　　(2) $y=\dfrac{(x+2)^3\sqrt{x+1}}{x-1}$

이제 α가 실수일 때, 함수 $y=x^\alpha$의 도함수를 구하여 보자.

$y=x^\alpha$의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|y|=\ln|x^\alpha|,\ \ln|y|=\alpha\ln|x|$$

이고, y는 x의 함수이므로 합성함수의 미분법에 의하여

$$\frac{d}{dx}(\ln|y|)=\frac{y'}{y},\ \frac{d}{dx}(\alpha\ln|x|)=\frac{\alpha}{x}$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x},\ y'=y\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^\alpha$ (α는 실수)의 도함수

α가 실수일 때, $y=x^\alpha$이면 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$

보기 함수 $y=x^{\sqrt{2}}$을 미분하면 $y'=(x^{\sqrt{2}})'=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$

문제 8 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(2x)^\pi$　　(2) $y=x^{\sqrt{2}}\ln x$

이때, 이 방정식을 만족시키는 함수 y는 $y=ae^{kt}$이다.

이와 같이 방사성 원소가 일정한 반감기를 가지고 붕괴된다는 사실에 기초하여 어떤 물질의 생성 연대를 추측하는 방법을 연대 측정법이라고 한다.

7

목표| 절댓값 기호가 포함된 로그함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 양변의 절댓값에 자연로그를 취하여 정리하면

$$\ln|y|=\ln|x|+2\ln|x-2|-3\ln|x-1|$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-1}$$

$$=\frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}$$

$$y'=y\cdot\frac{x+2}{x(x-1)(x-2)}$$

$$=\frac{x(x+2)(x-2)^2}{x(x-1)^4(x-2)}=\mathbf{\frac{x^2-4}{(x-1)^4}}$$

(2) 양변의 절댓값에 자연로그를 취하여 정리하면

$$\ln|y|=3\ln|x+2|+\frac{1}{2}\ln|x+1|$$
$$-\ln|x-1|$$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{y'}{y}=\frac{3}{x+2}+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{x-1}$$

$$=\frac{5x^2-5x-12}{2(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$y'=y\cdot\frac{5x^2-5x-12}{2(x-1)(x+1)(x+2)}$$

$$=\mathbf{\frac{(x+2)^2(5x^2-5x-12)\sqrt{x+1}}{2(x-1)^2(x+1)}}$$

8

목표| $y=x^\alpha$ (α는 실수)이면 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$임을 이용하여 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(2x)^\pi$이므로

$$y'=2^\pi(x^\pi)'=\mathbf{2^\pi\cdot\pi x^{\pi-1}}$$

(2) $y'=(x^{\sqrt{2}})'\ln x+(x^{\sqrt{2}})(\ln x)'$

$$=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}\ln x+x^{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}\ln x+x^{\sqrt{2}-1}$$

$$=\mathbf{x^{\sqrt{2}-1}(\sqrt{2}\ln x+1)}$$

지/도/자/료

1. 여러 개의 함수가 곱과 몫의 형태로 되어 있는 복잡한 함수를 미분할 때, 양변의 절댓값에 자연로그를 취하여 로그함수의 미분을 활용하도록 지도한다. 물론, 몫의 미분법을 활용하여 도함수를 구하여도 되므로 두 가지 방법 중 계산이 쉽고 편리한 방법을 선택하도록 지도한다.

2. 로그함수의 미분법을 이용하여 $y=x^\alpha$ (α는 실수)이면 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$임을 알게 한다.

본문 해설

❶ 삼각함수의 도함수를 정리하면 다음과 같다.

(1) $(\sin x)'=\cos x$

(2) $(\cos x)'=-\sin x$

(3) $(\tan x)'=\sec^2 x$

(4) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(5) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(6) $(\cot x)'=-\csc^2 x$

이때, 'c'로 시작되는 삼각함수를 미분하면 '−' 부호가 붙는 것을 기억한다.

9

목표| 몫의 미분법을 이용하여 삼각함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=\left(\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)'$

$$=\frac{(\cos x)'(1+\sin x)-(\cos x)(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$$

$$=-\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{1+\sin x}}$$

(2) $y'=\left(\dfrac{\sec x}{1+\sec x}\right)'$

$$=\frac{(\sec x)'(1+\sec x)-(\sec x)(1+\sec x)'}{(1+\sec x)^2}$$

$$=\boldsymbol{\frac{\sec x\tan x}{(1+\sec x)^2}}$$

교과서 120 쪽

삼각함수가 포함된 복잡한 함수의 도함수를 구하여 보자.

예제 07 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\dfrac{\sin x}{x}$ (2) $y=\dfrac{2-\sin x}{2+\sin x}$

❶ 풀이 (1) $y'=\dfrac{(\sin x)'x-(\sin x)x'}{x^2}=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

(2) $y'=\dfrac{(2-\sin x)'(2+\sin x)-(2-\sin x)(2+\sin x)'}{(2+\sin x)^2}$

$=\dfrac{-\cos x(2+\sin x)-(2-\sin x)\cos x}{(2+\sin x)^2}=-\dfrac{4\cos x}{(2+\sin x)^2}$

답 (1) $y'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ (2) $y'=-\dfrac{4\cos x}{(2+\sin x)^2}$

문제 9 다음 함수를 미분하여라.

$(\sec x)'=\sec x\tan x$

(1) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ (2) $y=\dfrac{\sec x}{1+\sec x}$

예제 08 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=\cos(3x+1)$ (2) $y=\sin^2 3x$

풀이 (1) $u=3x+1$이라고 하면 $y=\cos u$, $\dfrac{dy}{du}=-\sin u$, $\dfrac{du}{dx}=3$이므로

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=-\sin u\cdot 3$

$=-\sin(3x+1)\cdot 3=-3\sin(3x+1)$

(2) $u=\sin 3x$라고 하면 $y=u^2$, $\dfrac{dy}{du}=2u$, $\dfrac{du}{dx}=3\cos 3x$이므로

$y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}=2u\cdot(3\cos 3x)$

$=2\sin 3x\cdot 3\cos 3x=6\sin 3x\cos 3x$

답 (1) $y'=-3\sin(3x+1)$ (2) $y'=6\sin 3x\cos 3x$

문제 10 다음 함수를 미분하여라.

$(\csc x)'=-\csc x\cot x$
$(\cot x)'=-\csc^2 x$

(1) $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$ (2) $y=\csc(3x+5)$

(3) $y=\cos^2(x^2+1)$ (4) $y=\sqrt{\cot 3x}$

10

목표| 합성함수의 미분법을 이용하여 삼각함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(\sin x)'=\cos x$이므로

$$y'=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{3}-x\right)'$$

$$=\boldsymbol{-\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}$$

(2) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$이므로

$$y'=-\csc(3x+5)\cot(3x+5)\cdot(3x+5)'$$

$$=\boldsymbol{-3\csc(3x+5)\cot(3x+5)}$$

(3) $(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$y'=2\cos(x^2+1)\cdot\{\cos(x^2+1)\}'$$

$$=2\cos(x^2+1)\cdot\{-\sin(x^2+1)\cdot(x^2+1)'\}$$

$$=\boldsymbol{-4x\cos(x^2+1)\sin(x^2+1)}$$

(4) $(\cot x)'=-\csc^2 x$이므로

$$y'=\left\{(\cot 3x)^{\frac{1}{2}}\right\}'$$

$$=\frac{1}{2}(\cot 3x)^{-\frac{1}{2}}(\cot 3x)'$$

$$=\frac{1}{2}(\cot 3x)^{-\frac{1}{2}}\{-\csc^2 3x\cdot(3x)'\}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{3\csc^2 3x}{2\sqrt{\cot 3x}}}$$

교과서 121 쪽

04 이계도함수

● 이계도함수를 구할 수 있다.

이계도함수란 무엇인가?

탐구 활동 삼차함수 $f(x)=x^3-2x^2+5x+4$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $f(x)$의 도함수를 구하여 보자.
2. 함수 $f'(x)$의 도함수를 구하여 보자.

❶ 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, 다음과 같은 $f'(x)$의 도함수를 생각할 수 있다.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

이 극한을 함수 $f(x)$의 **이계도함수**라 하고, 기호로

$$f''(x),\ y'',\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2}{dx^2}f(x)$$

와 같이 나타낸다.

$f''(x)=\frac{d}{dx}f'(x)$

보기 함수 $y=5x^4+4x^3+2x$의 도함수가 $y'=20x^3+12x^2+2$이므로 이 함수의 이계도함수는 $y''=60x^2+24x$이다.

문제 1 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=(x+1)^3$ (2) $y=\frac{1}{x-1}$

예제 01 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=\cos 2x$ (2) $y=\ln 3x$

풀이 (1) $y'=(-\sin 2x)\cdot 2=-2\sin 2x$이므로 $y''=-2(\cos 2x)\cdot 2=-4\cos 2x$

(2) $y'=\frac{1}{3x}\cdot 3=\frac{1}{x}$이므로 $y''=-\frac{1}{x^2}$

답 (1) $y''=-4\cos 2x$ (2) $y''=-\frac{1}{x^2}$

04 이계도함수

소단원 지도 목표

① 이계도함수의 뜻을 알게 한다.
② 이계도함수를 나타내는 방법을 알게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$의 개념을 지도할 때, 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$도 함수임을 강조한다.

2. 삼계도함수 이상은 다루지 않도록 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$를 구하고 $f'(x)$의 도함수를 구함으로써 삼차함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$를 이해하기 위한 활동이다.

1. $f'(x)=3x^2-4x+5$

2. $\{f'(x)\}'=6x-4$

본문 해설

❶ 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$가 미분가능한 함수일 때, 함수 $y=f'(x)$의 도함수를 구할 수 있다.

일반적으로 함수 $f(x)$가 미분가능하고 그 도함수

$f'(x), f''(x), \cdots, f^{(n-1)}(x)$

가 미분가능할 때, $(n-1)$계도함수 $f^{(n-1)}(x)$의 도함수를 $f(x)$의 n계도함수라 하고 $f^{(n)}(x)$로 나타낸다. 즉,

$f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}'$

특히 삼각함수 $f(x)=\sin x$의 n계도함수를 구하면 다음과 같이 순환함을 알 수 있다.

$f(x)=\sin x$
$f'(x)=\cos x$
$f''(x)=-\sin x$
$f^{(3)}(x)=-\cos x$
$f^{(4)}(x)=\sin x=f(x)$
$\vdots$

따라서 $n=4q+r$ (q, r는 음이 아닌 정수)이면

$f^{(n)}(x)=f^{(r)}(x)$

가 성립한다.

또 지수함수 $g(x)=e^x$의 n계도함수는 $g^{(n)}(x)=e^x$이다.

일반적으로 다항함수는 유한 번 미분하면 '0'이 되지만 삼각함수, 지수함수, 로그함수 등은 끝없이 미분할 수 있다.

1

목표 | 이계도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $y'=3(x+1)^2(x+1)'=3(x+1)^2$이므로

$y''=6(x+1)(x+1)'=\mathbf{6(x+1)}$

(2) $y'=\{(x-1)^{-1}\}'=-(x-1)^{-1-1}=-\frac{1}{(x-1)^2}$

이므로

$y''=\{-(x-1)^{-2}\}'=2(x-1)^{-2-1}(x-1)'=\mathbf{\frac{2}{(x-1)^3}}$

2

목표| 이계도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=\cos 2x\cdot(2x)'=2\cos 2x$이므로

$y''=2(-\sin 2x)\cdot(2x)'=\mathbf{-4\sin 2x}$

(2) $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 $y''=\mathbf{-\dfrac{1}{x^2}}$

3

목표| 이계도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=e^x\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}$이므로

$y''=e^x\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}+e^x\cdot\dfrac{1}{x}+e^x\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$

$\quad=\mathbf{e^x\left(\ln x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)}$

(2) $y'=2\sin x\cos x$이므로

$y''=2(\cos x\cos x-\sin x\sin x)$

$\quad=\mathbf{2\cos^2 x-2\sin^2 x}$

(3) $y'=4x^3e^x+x^4e^x$이므로

$y''=12x^2e^x+4x^3e^x+4x^3e^x+x^4e^x$

$\quad=\mathbf{e^x(x^4+8x^3+12x^2)}$

(4) $y'=\cos x+x(-\sin x)$이므로

$y''=-\sin x-\sin x-x\cos x$

$\quad=\mathbf{-2\sin x-x\cos x}$

4

목표| 주어진 함수의 도함수와 이계도함수가 포함된 등식이 성립함을 증명할 수 있게 한다.

풀이| $y'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$y''=-e^{-x}(\cos x-\sin x)+e^{-x}(-\sin x-\cos x)$

$\quad=-2e^{-x}\cos x$

따라서 $y''+2y'+2y=0$

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f''(x)=f(x)$, $g''(x)=-g(x)$를 만족시키는 함수가 있음을 알게 한다.

풀이| ㉮ 함수 $f(x)=e^{-x}$일 때, $f'(x)=-e^{-x}$, $f''(x)=e^{-x}$이므로 $f''(x)=f(x)$

함수 $g(x)=\sin x$일 때, $g'(x)=\cos x$, $g''(x)=-\sin x$이므로 $g''(x)=-g(x)$

교과서 122 쪽

문제 2 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=\sin 2x$ (2) $y=\ln x$

예제 02 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=x^2\ln x$ (2) $y=e^x\cos x$

풀이 (1) $y'=2x\cdot\ln x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=2x\ln x+x$이므로

$y''=2\cdot\ln x+2x\cdot\dfrac{1}{x}+1=2\ln x+3$

(2) $y'=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$이므로

$y''=(e^x)'(\cos x-\sin x)+e^x(\cos x-\sin x)'$

$\quad=-2e^x\sin x$

답 (1) $y''=2\ln x+3$ (2) $y''=-2e^x\sin x$

문제 3 다음 함수의 이계도함수를 구하여라.

(1) $y=e^x\ln x$ (2) $y=\sin^2 x$

(3) $y=x^4e^x$ (4) $y=x\cos x$

문제 4 함수 $y=e^{-x}\sin x$에 대하여 다음이 성립함을 증명하여라.

$$y''+2y'+2y=0$$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

호빈이와 연희의 대화를 보고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f''(x)=f(x)$, $g''(x)=-g(x)$를 만족시키는 함수를 각각 찾고, 서로 비교하여 보자.

읽/기/자/료 미분을 이용한 함숫값의 어림

삼각함수, 지수함수, 로그함수의 함숫값을 어림하기 위해서 다음과 같이 매클로린(Maclaurin) 급수를 이용한다.

삼각함수, 지수함수, 로그함수와 같이 함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 열린 구간에서 무한 번 미분가능할 때 다음이 성립한다.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

이때, $f^{(n)}(a)$는 함수 $f(x)$를 계속하여 n번 미분한 n계도함수 $f^{(n)}(x)$의 $x=a$에서의 값을 뜻한다. 예를 들어 $f(x)=e^x$일 때

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots$이므로 $x=1$, $\dfrac{1}{2}$을 각각 대입하면 실제와 가까운 e, $\sqrt{e}$의 값을 어림할 수 있다.

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

$$\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$$

중단원 기초

[해답 p.210]

수준별 학습

1 다음 함수를 미분하여라. — 01 함수의 몫의 미분법

(1) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$　(2) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+1}$

(3) $y=\dfrac{1}{x^4}$　(4) $y=\dfrac{x^2-6}{x^3}$

2 다음 함수를 미분하여라. — 02 합성함수의 미분법

(1) $y=(5x+2)^3$　(2) $y=\dfrac{2}{(x-3)^4}$

3 역함수의 미분법을 이용하여 다음 함수를 미분하여라. — 03 역함수의 미분법

(1) $y=\sqrt[5]{x}$　(2) $y=\sqrt{1-3x}$

4 다음 함수를 미분하여라. — 03 역함수의 미분법 $y=x^{\alpha}$(α는 실수)의 도함수

(1) $y=x^3\sqrt{x}$　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

(3) $y=x^{\sqrt{3}}$　(4) $y=x^e$

5 다음 함수를 미분하여라. — 03 역함수의 미분법 여러 가지 함수의 도함수

(1) $y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$　(2) $y=5^{3x^2}$

(3) $y=\ln 4x$　(4) $y=(\log_2 x)^3$

(5) $y=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$　(6) $y=\sin 3x$

6 다음 함수의 이계도함수를 구하여라. — 04 이계도함수

(1) $y=\sqrt{x}$　(2) $y=x\sin x$

(3) $y=2e^{3x}$　(4) $y=\ln 2x$

중/단/원 기초

1

목표| 함수의 몫의 미분법을 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=\mathbf{\dfrac{2}{(x+1)^2}}$　(2) $y'=\mathbf{\dfrac{-2x+5}{(x^2-5x+1)^2}}$

(3) $y'=\mathbf{-\dfrac{4}{x^5}}$　(4) $y'=\mathbf{\dfrac{-x^2+18}{x^4}}$

2

목표| 합성함수 미분법을 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=3(5x+2)^{3-1}(5x+2)'=\mathbf{15(5x+2)^2}$

(2) $y'=\{2(x-3)^{-4}\}'=2\{-4(x-3)^{-4-1}\}(x-3)'$

$=\mathbf{-\dfrac{8}{(x-3)^5}}$

3

목표| 역함수의 미분법을 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=y^5$이므로 $\dfrac{dx}{dy}=5y^4$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{5y^4}=\mathbf{\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}}$

(2) $1-3x=y^2$, $x=\dfrac{1-y^2}{3}$이므로 $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{2}{3}y$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=-\dfrac{3}{2y}=\mathbf{-\dfrac{3}{2\sqrt{1-3x}}}$

4

목표| $y=x^{\alpha}$ (α는 실수)이면 $y'=\alpha x^{\alpha-1}$임을 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=\mathbf{\dfrac{7}{2}x^2\sqrt{x}}$　(2) $y'=\mathbf{-\dfrac{5}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}}$

(3) $y'=\mathbf{\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}}$　(4) $y'=\mathbf{ex^{e-1}}$

5

목표| 함수의 몫의 미분법, 합성함수의 미분법을 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=\dfrac{(e^x)'(e^x+1)-e^x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$

$=\mathbf{\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}}$

(2) $y'=(5^{3x^2})'=5^{3x^2}(\ln 5)(3x^2)'=\mathbf{6x\cdot5^{3x^2}\ln 5}$

(3) $y'=(\ln 4x)'=\dfrac{1}{4x}(4x)'=\mathbf{\dfrac{1}{x}}$

(4) $y'=\{(\log_2 x)^3\}'=3(\log_2 x)^2(\log_2 x)'=\mathbf{\dfrac{3(\log_2 x)^2}{x\ln 2}}$

(5) $y'=\left(\dfrac{\sin x}{1+\sin x}\right)'$

$=\dfrac{(\sin x)'(1+\sin x)-\sin x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$

$=\mathbf{\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}}$

(6) $y'=(\sin 3x)'=\mathbf{3\cos 3x}$

6

목표| 이계도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $y''=\mathbf{-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}}$

(2) $y'=\sin x+x\cos x$, $y''=\mathbf{2\cos x-x\sin x}$

(3) $y'=6e^{3x}$, $y''=\mathbf{18e^{3x}}$　(4) $y'=\dfrac{2}{2x}=\dfrac{1}{x}$, $y''=\mathbf{-\dfrac{1}{x^2}}$

교과서 124 쪽

중단원 기본

[해답 p.210]

수준별 학습

1 함수 $f(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1-x)}{x}$의 값을 구하여라.

01 함수의 몫의 미분법

2 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(2)=1,\ f'(2)=2$$

를 만족시킬 때, 함수 $y=x\{f(x)\}^3$의 $x=2$에서의 미분계수를 구하여라.

02 합성함수의 미분법

3 함수 $f(x)=x^2+6x+1\ (x>-3)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $g'(8)$의 값을 구하여라.

03 역함수의 미분법

4 함수 $f(x)=\tan x\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$라고 할 때, $\dfrac{dy}{dx}$를 x에 대한 식으로 나타내어라.

03 역함수의 미분법
삼각함수의 도함수

5 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{10x}}{10}=S$일 때, $10S$의 값을 구하여라.

03 역함수의 미분법
지수함수의 도함수

6 함수 $f(x)=xe^{ax+b}$에 대하여 $f'(0)=3,\ f''(0)=12$일 때, 두 상수 a, b의 값을 구하여라.

04 이계도함수

중/단/원 기본

1

목표| 함수의 몫의 미분법을 이용하여 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=\dfrac{-2(x^2+1)+2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1-x)}{x}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1)-f(1-x)+f(1)}{x}$

$=2f'(1)=\mathbf{0}$

2

목표| 곱의 미분법과 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y'=\{f(x)\}^3+3x\{f(x)\}^2f'(x)$

$x=2$에서의 미분계수는

$y'=\{f(2)\}^3+3\cdot 2\{f(2)\}^2f'(2)$

$=1^3+6\cdot 1^2\cdot 2=\mathbf{13}$

3

목표| 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $g(8)=a$라고 하면 $f(a)=8$

즉, $f(a)=a^2+6a+1=8$이므로

$a^2+6a-7=0$, $a=-7$ 또는 $a=1$

그런데 $a>-3$이므로 $a=1$

따라서 $g(8)=1$이고, $f'(x)=2x+6$이므로

$g'(8)=\dfrac{1}{f'(1)}=\mathbf{\dfrac{1}{8}}$

4

목표| 역함수의 미분법을 이용하여 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x=f(y)$이므로 $x=\tan y$, $\dfrac{dx}{dy}=\sec^2 y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\mathbf{\frac{1}{1+x^2}}$$

5

목표| 합성함수의 미분법을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\ln\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{10x}}{10}$이라 하면 $f(0)=0$

$$f'(x)=\frac{\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+10e^{10x}}{10}}{\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{10x}}{10}}=\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+10e^{10x}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{10x}}$$

$\displaystyle S=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{10x}}{10}$

$\displaystyle=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=\frac{55}{10}=5.5$

따라서 $10S=\mathbf{55}$

6

목표| 이계도함수를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=e^{ax+b}+axe^{ax+b}=e^{ax+b}\,(1+ax)$

$f''(x)=ae^{ax+b}\,(1+ax)+ae^{ax+b}=ae^{ax+b}\,(2+ax)$

교과서 125 쪽

중단원 실력

[해답 p.211]

수준별 학습

1 함수 $f_n(x)=x^n\ (0<x<1)$에 대하여 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f_k(x)$라고 할 때, $g'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하여라. — 01 함수의 몫의 미분법

2 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$, $\lim\limits_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=5$를 만족시킬 때, 함수 $y=(g\circ f)(x)$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하여라. — 02 합성함수의 미분법

3 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\lim\limits_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=3$을 만족시킨다. 이때 $f'(1)$의 값을 구하여라. — 03 역함수의 미분법

4 함수 $f(x)=\ln(x^2-1)\ (x>1)$에 대하여 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{f'(n)}{n}$의 값을 구하여라. — 03 역함수의 미분법 로그함수의 도함수

5 함수 $y=e^x\sin 2x$가 모든 실수 x에 대하여 $y''+ay'+5y=0$을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하여라. — 04 이계도함수

$f'(0)=3$에서 $\quad e^b=3$

$f''(0)=12$에서 $\quad 2ae^b=12$

따라서 $\quad \boldsymbol{a=2,\ b=\ln 3}$

중/단/원 실력

1

목표| 몫의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x^k$

$$=\lim_{n\to\infty}(x+x^2+\cdots+x^n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x^n)}{1-x}=\frac{x}{1-x}\quad(0<x<1)$$

$$g'(x)=\frac{x'(1-x)-x\cdot(1-x)'}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}$$

따라서 $\quad g'\left(\frac{1}{2}\right)=\mathbf{4}$

2

목표| 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=3$에서 $\quad f(1)=2,\ f'(1)=3,$

$\lim\limits_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=5$에서 $\quad g(2)=3,\ g'(2)=5$

를 만족시키고, $y'=g'(f(x))f'(x)$이므로

함수 $y=(g\circ f)(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는

$$g'(f(1))f'(1)=g'(2)\times3$$

$$=5\times3=\mathbf{15}$$

3

목표| 역함수의 미분법을 이용하여 급수의 수렴하는 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{x\to2}\frac{g(x)-1}{x-2}=3$에서

$g(2)=1,\ g'(2)=3$이므로 $\quad f(1)=2$

따라서

$$f'(1)=\frac{1}{g'(f(1))}=\frac{1}{g'(2)}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

4

목표| 합성함수의 미분법을 이용하여 급수의 수렴하는 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)=\ln(x^2-1)\ (x>1)$에 대하여

$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}$이므로

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f'(n)}{n}=\sum_{k=2}^{n}\frac{2n}{n(n^2-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

5

목표| 이계도함수를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y'=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)$

$y''=e^x(4\cos 2x-3\sin 2x)$

이므로 모든 실수 x에 대하여

$(a+2)e^x(\sin 2x+2\cos 2x)=0$

따라서 $\quad \boldsymbol{a=-2}$

2 도함수의 활용

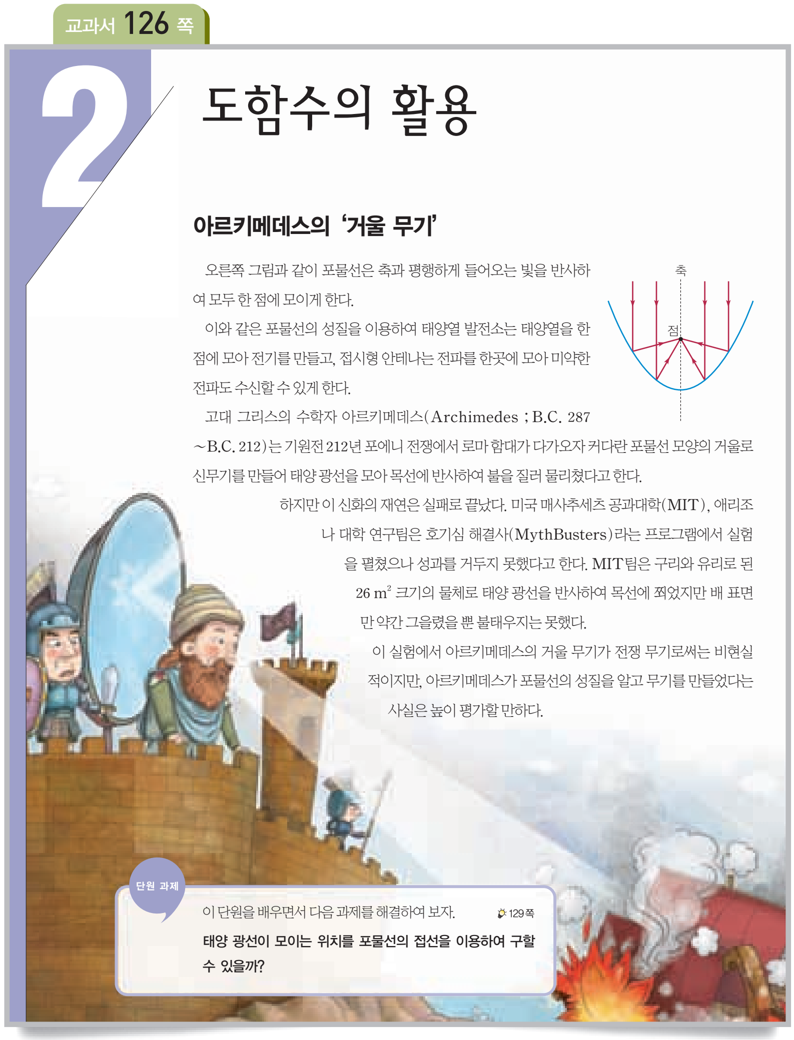
중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.
③ 방정식과 부등식에 활용할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 접선의 방정식	접선의 방정식
02 함수의 그래프	곡선의 오목과 볼록
	변곡점의 판정
	이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정
	함수의 그래프의 개형
	구간에서의 함수의 최댓값, 최솟값
03 방정식과 부등식에의 활용	도함수를 이용한 방정식의 실근의 개수 구하기
	도함수를 이용한 부등식의 증명
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제


교과서 126 쪽

2 도함수의 활용

아르키메데스의 '거울 무기'

오른쪽 그림과 같이 포물선은 축과 평행하게 들어오는 빛을 반사하여 모두 한 점에 모이게 한다.

이와 같은 포물선의 성질을 이용하여 태양열 발전소는 태양열을 한 점에 모아 전기를 만들고, 접시형 안테나는 전파를 한곳에 모아 미약한 전파도 수신할 수 있게 한다.

고대 그리스의 수학자 아르키메데스(Archimedes ; B.C. 287~B.C. 212)는 기원전 212년 포에니 전쟁에서 로마 함대가 다가오자 커다란 포물선 모양의 거울로 신무기를 만들어 태양 광선을 모아 목선에 반사하여 불을 질러 물리쳤다고 한다.

하지만 이 신화의 재연은 실패로 끝났다. 미국 매사추세츠 공과대학(MIT), 애리조나 대학 연구팀은 호기심 해결사(MythBusters)라는 프로그램에서 실험을 펼쳤으나 성과를 거두지 못했다고 한다. MIT팀은 구리와 유리로 된 26 m^2 크기의 물체로 태양 광선을 반사하여 목선에 쬐었지만 배 표면만 약간 그을렸을 뿐 불태우지는 못했다.

이 실험에서 아르키메데스의 거울 무기가 전쟁 무기로써는 비현실적이지만, 아르키메데스가 포물선의 성질을 알고 무기를 만들었다는 사실은 높이 평가할 만하다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 129 쪽

태양 광선이 모이는 위치를 포물선의 접선을 이용하여 구할 수 있을까?

들어가면서 미분법은 수학 전반에 걸쳐 폭넓게 활용되고 있다. 이 단원에서는 미분법을 이용하여 곡선의 접선을 구하고 오목, 볼록을 이해하며 이를 바탕으로 곡선의 그래프를 그릴 수 있게 한다. 또 실생활에서 최대, 최소의 문제를 해결하고 방정식과 부등식에도 활용할 수 있게 하는 것이 이 단원을 학습하는 목적이다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 접선의 방정식을 구할 수 있다.	상	주어진 점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	중	곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
2. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	상	그래프의 오목, 볼록을 포함한 함수의 증가, 감소를 나타내는 표를 만들고, 그 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
	중	함수의 그래프의 오목, 볼록을 판별할 수 있다.
	하	함수의 그래프의 증가, 감소를 판별할 수 있다.
3. 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.	상	도함수를 활용하여 방정식과 부등식에 관한 문제를 해결하고 실생활에 유용함을 인식하게 한다.
	중	도함수를 활용하여 간단한 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.
	하	주어진 그래프를 보고 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.

교과서 127 쪽

01 접선의 방정식

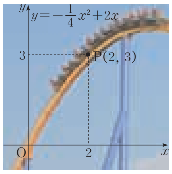
● 접선의 방정식을 구할 수 있다.

접선의 방정식은 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 그림은 어느 롤러코스터의 레일의 일부를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 이 레일의 어떤 점을 기준으로 수평 거리가 x m 되었을 때의 높이 y m가

$$y=-\frac{1}{4}x^2+2x$$

라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



1. 점 P(2, 3)에서의 접선의 기울기를 구하여 보자.
2. 1을 이용하여 이 곡선 위의 점 P(2, 3)에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

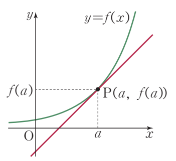
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 P에서의 접선은 점 $(a,\ f(a))$를 지나고, 기울기가 $f'(a)$인 직선이므로 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



수학 Ⅰ 직선의 방정식
점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y-y_1=m(x-x_1)$

❶ **접선의 방정식**
곡선 $y=f(x)$위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은
$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 롤러코스터의 레일이 그리는 포물선 위의 한 점에서의 접선의 기울기는 미분계수와 같음을 알게 하여 접선의 의미를 생각해 보게 한다. 또한 포물선을 함수로 나타내고 그 함수의 도함수를 구하여 접선의 기울기를 구할 수 있음을 알게 하기 위한 활동이다.

1. $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$라 하면
$f'(x)=-\frac{1}{2}x+2$
따라서 $x=2$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=\mathbf{1}$이다.

2. 기울기가 1이고 점 (2, 3)을 지나는 직선의 방정식은 $y-3=1(x-2)$, 즉 $\boldsymbol{y=x+1}$이다.

01 접선의 방정식

소단원 지도 목표

① 미분계수를 이용하여 곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 곡선의 접선에 대한 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 접선의 기울기는 미분계수와 같으므로 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식은 기울기(미분계수)를 알고 한 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 때와 같음을 이해시키도록 한다.

2. 곡선에 대한 접선의 방정식은 접점에서의 접선의 방정식, 기울기가 주어진 접선의 방정식, 곡선 밖의 점을 지나는 접선의 방정식의 세 가지로 구분할 수 있다.

본문 해설

❶ • 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$$y-y_1=m(x-x_1)$$

• 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은
$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

• 일반적으로 기울기가 m인 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.
(1) 접점을 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$로 놓는다.
(2) 방정식 $f'(a)=m$에서 a를 구한다.
(3) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에서 접선의 방정식을 구한다.

• 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 점 $(\alpha,\ \beta)$에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.
(1) 접점을 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$로 놓는다.
(2) $f'(a)$를 구한다.
(3) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 $x=\alpha$, $y=\beta$를 대입하여 a를 구한다.

교과서 128 쪽

예제 01 곡선 $y=x^2+2x$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^2+2x$라고 하면

$f'(x)=2x+2$

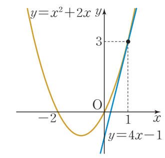
점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=4$

따라서 구하는 접선은 기울기가 4이고, 점 $(1,\ 3)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-3=4(x-1)$

$y=4x-1$



답 $y=4x-1$

문제 1 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=x^2-3x+4\quad(1,\ 2)$ (2) $y=2x^3-4x+1\quad(-1,\ 3)$

(3) $y=e^x-1\quad(1,\ e-1)$ (4) $y=\cos x\quad\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2}\right)$

예제 02 곡선 $y=\ln x$에 접하고, 기울기가 1인 접선의 방정식을 구하여라.

❶ 풀이 $f(x)=\ln x$라고 하면

$f'(x)=\frac{1}{x}$

기울기가 1인 접점의 좌표를 $(a,\ \ln a)$라고 하면

접선의 기울기가 1이므로

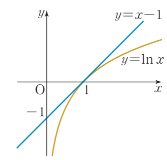
$f'(a)=\frac{1}{a}=1$

$a=1$

따라서 구하는 접선은 기울기가 1이고, 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 접선의 방정식은

$y-0=1\cdot(x-1)$

$y=x-1$



답 $y=x-1$

문제 2 다음 곡선에 접하고, 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=e^{2x}$ (2) $y=\sin 4x\quad\left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$

1

목표 | 곡선 위의 주어진 점에서 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $f(x)=x^2-3x+4$로 놓으면

$f'(x)=2x-3$

점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=2\cdot1-3=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-1(x-1)$, $\boldsymbol{y=-x+3}$

(2) $f(x)=2x^3-4x+1$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-4$

점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=6\cdot(-1)^2-4=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=2(x+1)$, $\boldsymbol{y=2x+5}$

(3) $f(x)=e^x-1$로 놓으면 $f'(x)=e^x$

점 $(1,\ e-1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=e$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-(e-1)=e(x-1)$, $\boldsymbol{y=ex-1}$

(4) $f(x)=\cos x$로 놓으면 $f'(x)=-\sin x$

점 $\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$, $\boldsymbol{y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi+\frac{1}{2}}$

2

목표 | 접선의 기울기가 주어질 때, 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $f(x)=e^{2x}$으로 놓으면 $f'(x)=2e^{2x}$

접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(a)=2e^{2a}=2$, $a=0$

이때, $f(0)=1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=2(x-0)$, $\boldsymbol{y=2x+1}$

(2) $f(x)=\sin 4x$로 놓으면 $f'(x)=4\cos 4x$

접점의 $x\left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$ 좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 2이므로

$f'(a)=4\cos 4a=2$, $4a=\frac{\pi}{3}$, $a=\frac{\pi}{12}$

이때, $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$, $\boldsymbol{y=2x-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

본문 해설

❶ 접선의 방정식을 구할 때 곡선 위의 점이 주어진 경우에는 그 점이 접하는 점이 되지만 곡선 위의 점이 주어지지 않은 경우에는 접하는 점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓고, a의 값을 구해야 한다.

예제 03 원점에서 곡선 $y=e^x$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $f(x)=e^x$이라고 하면

$f'(x)=e^x$

접점의 좌표를 $(a,\ e^a)$이라고 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=e^a$이므로 접선의 방정식은

$y-e^a=e^a(x-a)$ ……①

이 접선은 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로

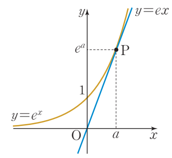
$0-e^a=e^a(0-a)$

$e^a-ae^a=0$

$e^a(1-a)=0$

$a=1$

a의 값을 ①에 대입하여 접선의 방정식을 구하면 $y=ex$



답 $y=ex$

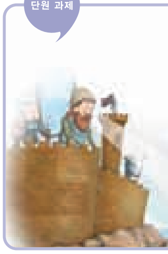
문제 3 다음 주어진 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=x^2-x$ $(1,\ -1)$ (2) $y=\ln x$ $(0,\ 1)$

(3) $y=\dfrac{1}{x}$ $(2,\ 0)$ (4) $y=\sqrt{x-1}$ $(0,\ 0)$

문제 4 직선 $y=2x$가 곡선 $y=m\ln x$에 접할 때, 상수 m의 값을 구하여라.

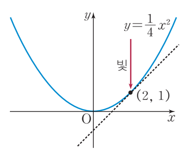
단원 과제



앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

빛이 곡선의 주어진 한 점에서 반사할 때에는, 그 점에서 곡선에 접하는 접선이 반사면의 역할을 한다. 이때 반사의 법칙에 따르면 들어오는 빛이 반사면과 이루는 각은 반사하는 빛이 반사면과 이루는 각과 같다고 한다.

포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$에 빛이 y축과 평행하게 들어온다고 할 때, 포물선 위의 점 $(2,\ 1)$에서 반사되는 빛이 y축과 만나는 점의 좌표를 구하여라.



3

목표| 곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 접점의 좌표를 $(a,\ a^2-a)$라고 하면 접선의 방정식은

$y-(a^2-a)=(2a-1)(x-a)$

이때, 접선이 점 $P(1,\ -1)$을 지나므로

$-1=(2a-1)-a^2$, $a^2-2a=0$, $a=0$ 또는 $a=2$

따라서 접선의 방정식은 $\boldsymbol{y=-x}$ 또는 $\boldsymbol{y=3x-4}$

(2) 접점의 좌표를 $(a,\ \ln a)$라고 하면 접선의 방정식은

$y-\ln a=\dfrac{1}{a}(x-a)$

이때, 접선이 점 $P(0,\ 1)$을 지나므로

$1-\ln a=-1$, $a=e^2$

따라서 접선의 방정식은 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{e^2}x+1}$

(3) 접점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{1}{a^2}(x-a)$

이때, 접선이 점 $P(2,\ 0)$을 지나므로

$-\dfrac{1}{a}=-\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{a}$, $0=-\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{2}{a}$, $a=1$

따라서 접선의 방정식은 $\boldsymbol{y=-x+2}$

(4) 접점의 좌표를 $(a,\ \sqrt{a-1})$이라고 하면 접선의 방정식은

$y-\sqrt{a-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{a-1}}(x-a)$

이때, 접선이 점 $P(0,\ 0)$을 지나므로

$\dfrac{a}{2\sqrt{a-1}}=\sqrt{a-1}$, $a=2$

따라서 접선의 방정식은 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x}$

4

목표| 접선이 주어진 곡선의 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=m\ln x$, 접점의 좌표를 $(a,\ m\ln a)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=\dfrac{m}{a}=2$ …… ①

접선의 방정식은 $y-m\ln a=2(x-a)$

이 접선은 원점 $(0,\ 0)$을 지나므로 $-2a\ln a=-2a$

$a\neq0$이므로 $\ln a=1$에서 $a=e$

a의 값을 ①에 대입하면 $\boldsymbol{m=2e}$

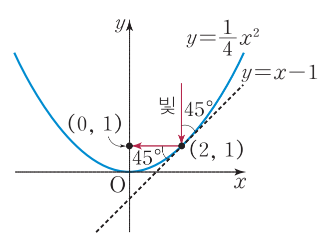
단원 과제

목표| 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 이용하여 반사된 빛이 y축과 만나는 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서 기울기는 1이고 접선의 방정식은

$y-1=1\cdot(x-2)$, $y=x-1$

이때 직선 $y=x-1$과 빛이 이루는 각은 $45°$이므로



반사되는 빛은 x축과 평행하다. 따라서 반사된 빛이 y축과 만나는 점의 좌표는 $\boldsymbol{(0,\ 1)}$이다.

02 함수의 그래프

소단원 지도 목표

① 곡선의 오목과 볼록의 뜻을 알게 한다.
② 변곡점의 뜻을 알게 한다.
③ 이계도함수를 이용하여 곡선의 오목과 볼록을 판정할 수 있게 한다.
④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.
⑤ 함수의 그래프를 이용하여 구간에서 정의된 함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. $f''(a)=0$인 것은 점 $(a,\ f(a))$가 변곡점이 되기 위한 필요조건임을 강조하여 지도한다.

2. 그래프의 개형을 그리는 데 변곡점을 이용하여 그릴 수 있게 한다.

3. 곡선의 개형은 그 특징을 아는 것이 목적이므로 반드시 정밀하게 그릴 필요는 없으나, 좌표축과의 교점, 극대와 극소, 변곡점, 점근선과 같이 중요한 사항은 표시하도록 지도한다.

4. 최댓값과 최솟값을 구하는 문제에서는 주어진 함수의 정의역을 반드시 확인하도록 한다.

교과서 130 쪽

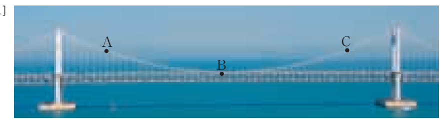
02 함수의 그래프

● 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

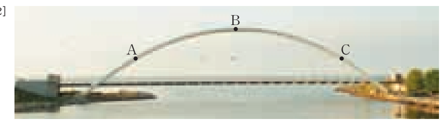
곡선의 오목과 볼록은 어떻게 알 수 있는가?

탐구 활동 다음 [사진 1]과 [사진 2]의 점 A, B, C에서 접선을 차례로 그어 보고, 물음에 답하여 보자.

[사진 1]



[사진 2]



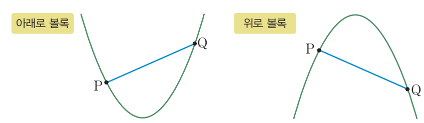
1. [사진 1]에서 점 P가 점 A에서 점 C까지 곡선을 따라 움직일 때, 점 P에서의 접선의 기울기의 변화를 말하여 보자.

2. [사진 2]에서 점 P가 점 A에서 점 C까지 곡선을 따라 움직일 때, 점 P에서의 접선의 기울기의 변화를 말하여 보자.

❶ 위의 그림에서 곡선을 따라 접선을 차례로 그었을 때, 접선의 기울기가 증가하면 아래로 볼록하고, 접선의 기울기가 감소하면 위로 볼록함을 알 수 있다.

일반적으로 어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 두 점 P, Q에 대하여 이 두 점 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.

또한 두 점 P, Q 사이에 있는 곡선 부분이 선분 PQ보다 항상 위쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록(또는 아래로 오목)하다고 한다.



탐구 활동의 이해

활동 목표 • 실생활에서 볼 수 있는 아래로 볼록한 곡선과 위로 볼록한 곡선 위의 임의의 점에서의 접선의 기울기의 변화를 알아보고 접선의 기울기와 곡선의 오목과 볼록의 관계를 알아보기 위한 활동이다.

1. 접선의 기울기가 증가함을 알 수 있다.

2. 접선의 기울기가 감소함을 알 수 있다.

본문 해설

❶ 곡선 $y=f(x)$의 오목과 볼록은 다음과 같이 여러 가지 방법으로 정의할 수 있다.

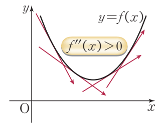
(1) 구간 $(a,\ b)$에 속하는 임의의 두 수 $x_1,\ x_2$에 대하여 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 일 때,
곡선 $y=f(x)$는 구간 $(a,\ b)$에서 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.

(2) $y=f(x)$의 그래프가 $x=a$의 근방에서 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선보다 위쪽에 있을 때, 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.

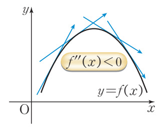
(3) 어떤 구간에서 $f'(x)$가 증가하면 그 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록(또는 위로 오목)하다고 한다.

이제 이계도함수를 이용하여 곡선의 오목과 볼록을 조사하여 보자.

어떤 구간에서 $f''(x)>0$이면 이 구간에서 x가 증가할 때 $f'(x)$는 증가하므로 접선의 기울기가 증가한다. 따라서 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 이 구간에서 아래로 볼록하다.



마찬가지로 어떤 구간에서 $f''(x)<0$이면 이 구간에서 x가 증가할 때 $f'(x)$는 감소하므로 접선의 기울기가 감소한다. 따라서 곡선 $y=f(x)$는 오른쪽 그림과 같이 이 구간에서 위로 볼록하다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

곡선의 오목과 볼록

함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서

(1) $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

(2) $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

예제 01 다음 곡선의 오목과 볼록을 조사하여라.

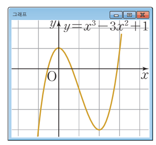
(1) $y=x^3-3x^2+1$ (2) $y=\sin x$ $(0<x<\pi)$

1 **풀이** (1) $f(x)=x^3-3x^2+1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x$

$f''(x)=6x-6=6(x-1)$

$f''(x)$의 부호는 $x>1$일 때 $f''(x)>0$이므로 이 구간에서 아래로 볼록하고, $x<1$일 때 $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 위로 볼록하다.

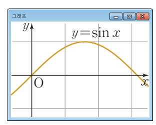


(2) $f(x)=\sin x$라고 하면

$f'(x)=\cos x$

$f''(x)=-\sin x$

$f''(x)$의 부호는 $0<x<\pi$일 때, $f''(x)<0$이므로 이 구간에서 위로 볼록하다.



답 (1) $x>1$일 때 아래로 볼록, $x<1$일 때 위로 볼록 (2) 위로 볼록

문제 1 다음 곡선의 오목과 볼록을 조사하여라.

(1) $y=x^3+6x^2+3x+1$ (2) $y=xe^x$

1

목표| 곡선의 오목과 볼록한 구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=3x^2+12x+3$,

$y''=6x+12$

$y''=0$에서 $x=-2$

$x>-2$일 때, $y''>0$,

$x<-2$일 때, $y''<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 **$x>-2$일 때 아래로 볼록하고, $x<-2$일 때 위로 볼록하다.**

(2) $y'=e^x(1+x)$,

$y''=e^x(1+x)+e^x=e^x(2+x)$

$y''=0$에서 $x=-2$

$x>-2$일 때, $y''>0$,

$x<-2$일 때, $y''<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 **$x>-2$일 때 아래로 볼록하고, $x<-2$일 때 위로 볼록하다.**

지/도/자/료

그래프의 개형을 그릴 때는 모든 것을 정밀하게 그릴 필요는 없지만 좌표축과의 교점, 극대와 극소, 변곡점, 점근선 등의 중요한 사항을 그래프에 나타내어야 한다. 이때, 변곡점이나 곡선의 오목과 볼록은 이계도함수를 이용하면 쉽게 알 수 있다.

이계도함수는 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$에 대하여 다시 도함수를 구한 것으로 $y=f''(x)$, y''과 같이 나타낸다.

(1) $f''(x)=0$이라고 해서 점 $(a,\ f(a))$에서 항상 변곡점이 되는 것은 아니다.
예를 들어 곡선 $y=x^4$ 위에 점 $(0,\ 0)$은 $f''(0)=0$이지만 변곡점이 아니다.

(2) $f'(x)$의 값의 부호는 $f(x)$의 값의 증감에 관련된다. 이것을 $f''(x)$와 $f'(x)$의 관계로 생각하면 $f''(x)$의 값의 부호는 $f'(x)$의 값의 증감, 곧 접선의 기울기의 증감에 관련되어 있다.
따라서 x의 값을 증가시키면서 그래프에 접선을 그릴 때 시계 반대 방향으로 접선이 회전하면 $f'(x)$의 값은 증가하고, 이때 $f''(x)>0$이며 그래프는 아래로 볼록하다.
한편 시계 방향으로 접선이 회전하면 $f'(x)$의 값은 감소하고, 이때 $f''(x)<0$이며 그래프는 위로 볼록하다.

2

목표| 곡선의 변곡점을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 함수 $f(x)=x^3-6x^2+12x$라고 하면 $f'(x)=3x^2-12x+12$

$f''(x)=6x-12=0$에서 $\quad x=2$

이때, $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<2$이면 $f''(x)<0$이고

$x>2$이면 $f''(x)>0$이다.

따라서 변곡점의 좌표는 $\quad$**(2, 8)**

(2) 함수 $f(x)=x^4+2x^3-2x+3$이라고 하면

$f'(x)=4x^3+6x^2-2$

$f''(x)=12x^2+12x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-1$

이때, $x=0$, $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<-1$이면 $f''(x)>0$이고,

$-1<x<0$이면 $f''(x)<0$이고,

$x>0$이면 $f''(x)>0$이다.

따라서 변곡점의 좌표는

(−1, 4), (0, 3)

(3) 함수 $f(x)=\ln(x^2+1)$이라고 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

$f''(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

이때, $x=1$, $x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<-1$이면 $f''(x)<0$이고,

$-1<x<1$이면 $f''(x)>0$이고,

$x>1$이면 $f''(x)<0$이다.

따라서 변곡점의 좌표는 $\quad$**(−1, ln 2), (1, ln 2)**

(4) 함수 $f(x)=\tan x$라고 하면 $\quad f'(x)=\sec^2 x$

$f''(x)=2\sec x\tan x\sec x=2\sec^2 x\tan x$

$f''(x)=0$에서 $\quad x=\pi$

이때, $x=\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<\pi$이면 $f''(x)<0$이고 $x>\pi$이면 $f''(x)>0$이다.

따라서 변곡점의 좌표는 $\quad$**(π, 0)**

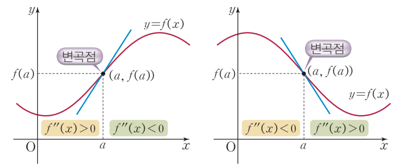
교과서 132 쪽

곡선의 모양이 오목과 볼록으로 바뀌는 점에 대하여 알아보자.

곡선 $y=f(x)$ 위에 있는 점 $(a,\ f(a))$에 대하여 $x=a$의 좌우에서 곡선의 모양이 아래로 볼록에서 위로 볼록으로 바뀌거나 위로 볼록에서 아래로 볼록으로 바뀔 때, 이 점 $(a,\ f(a))$를 곡선 $y=f(x)$의 **변곡점**이라고 한다.

즉, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌는 점 $(a,\ f(a))$가 이 곡선의 변곡점이고, 이때 $f''(a)$가 존재하면 $f''(a)=0$이다.

● 변곡점에서 곡선에 접하는 접선은 일반적인 접선과 달리 그 곡선과 교차한다.



일반적으로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 다음과 같이 판정한다.

변곡점의 판정

이계도함수를 가지는 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a,\ f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

예제 02 곡선 $y=x^3+3x^2+3x+2$의 변곡점을 구하여라.

풀이 $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2+6x+3$

$f''(x)=6x+6$

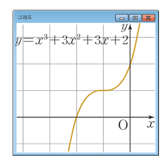
$f''(x)=0$에서 $\quad x=-1$

$x=-1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호는

$x<-1$일 때 $f''(x)<0$이고

$x>-1$일 때 $f''(x)>0$이다.

따라서 변곡점의 좌표는 $\quad(-1,\ 1)$



답 $\quad(-1,\ 1)$

문제 2 다음 곡선의 변곡점을 구하여라.

(1) $y=x^3-6x^2+12x$ $\qquad$ (2) $y=x^4+2x^3-2x+3$

(3) $y=\ln(x^2+1)$ $\qquad$ (4) $y=\tan x\ (0<x<2\pi)$

지/도/자/료

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에 대하여

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b=0$에서 $\quad x=-\dfrac{b}{3a}$

$$f\left(-\frac{b}{3a}+t\right)+f\left(-\frac{b}{3a}-t\right)$$

$$=a\left(-\frac{b}{3a}+t\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}+t\right)^2$$

$$+c\left(-\frac{b}{3a}+t\right)+d+a\left(-\frac{b}{3a}-t\right)^3$$

$$+b\left(-\frac{b}{3a}-t\right)^2+c\left(-\frac{b}{3a}-t\right)+d$$

$$=2a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+2b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+2c\left(-\frac{b}{3a}\right)+2d$$

$$=2f\left(-\frac{b}{3a}\right)$$

즉, 곡선 $y=f(x)$는 변곡점 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)\right)$에 대하여 대칭이다.

미적분 I 극대와 극소
미분가능한 함수 $f(x)$에서 $f'(a)=0$이고 $x=a$의 좌우에서 $f'(a)$의 부호를 조사하여 극대와 극소를 판정하였다.

함수 $f(x)$의 이계도함수 $f''(x)$가 존재할 때 함수의 극대와 극소를 판정하는 방법에 대하여 알아보자.

$$f'(a)=0,\ f''(a)<0\text{이면}\quad f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}$$

이때 $f''(a)<0$이므로 a에 충분히 가까운 x에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$x<a\text{일 때, } f''(a)=\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{x-a}<0\text{이므로}\quad f'(x)>0$$

$$x>a\text{일 때, } f''(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{x-a}<0\text{이므로}\quad f'(x)<0$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

1 마찬가지 방법으로 $f'(a)=0$, $f''(a)>0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소임을 보일 수 있다.

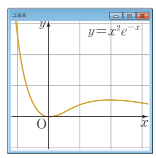
이상을 정리하면 다음과 같다.

이계도함수를 이용한 극대와 극소의 판정

이계도함수를 가지는 함수 $y=f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때
(1) $f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.
(2) $f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이다.

예제 03 이계도함수를 이용하여 함수 $f(x)=x^2e^{-x}$의 극값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-xe^{-x}(x-2)$이므로
$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$
$f''(x)=2e^{-x}-2xe^{-x}-2xe^{-x}+x^2e^{-x}$
$\qquad =e^{-x}(x^2-4x+2)$
$f''(0)$과 $f''(2)$의 부호를 조사하면
$f''(0)=2>0$, $f''(2)=-2e^{-2}<0$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 극소이고 극솟값은
$f(0)=0$이며, $x=2$일 때 극대이고 극댓값은 $f(2)=4e^{-2}$이다.



답 극솟값: 0, 극댓값: $4e^{-2}$

문제 3 이계도함수를 이용하여 다음 함수의 극값을 구하여라.

(1) $f(x)=2x^3-3x^2+1$　　(2) $f(x)=x^2\ln x$

(3) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$　　(4) $f(x)=x-2\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$

본문 해설

1 $f'(a)=0$, $f''(a)>0$이면

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}$$

이때 $f''(a)>0$이므로 a에 충분히 가까운 x에 대하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

$x<a$일 때,

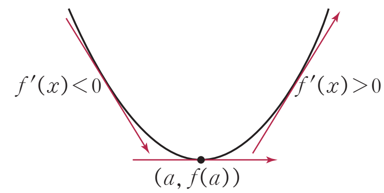
$$f''(a)=\lim_{x\to a-}\frac{f'(x)}{x-a}>0\text{이므로}\quad f'(x)<0$$

$x>a$일 때,

$$f''(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{x-a}>0\text{이므로}\quad f'(x)>0$$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이다.

한편 다음 그림과 같이 $f(a)$가 극솟값이면 도함수 $f'(x)$의 부호가 $x=a$의 좌우에서 음에서 양으로 변하므로 도함수 $f'(x)$는 $x=a$의 근방에서 증가하게 된다.



따라서 $f''(x)=\{f'(x)\}'\ge 0$이므로 $f''(a)\ge 0$이 된다.

3

목표 | 이계도함수를 이용하여 함수의 극값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $f'(x)=6x^2-6x$이므로
$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=1$
$f''(x)=12x-6$이므로
$f''(1)=6>0$, $f''(0)=-6<0$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=\mathbf{1}$이며, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=\mathbf{0}$이다.

(2) $f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$이므로
$f'(x)=0$에서 $\quad x=e^{-\frac{1}{2}}\ (x>0)$
$f''(x)=2\ln x+1+2=2\ln x+3$이므로
$f''(e^{-\frac{1}{2}})=2>0$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^{-\frac{1}{2}}$에서 극소이고 극솟값은 $f(e^{-\frac{1}{2}})=\mathbf{-\dfrac{1}{2e}}$이다.

(3) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$이므로 $f'(x)=0$에서 $\quad x=\pm1$
$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$이므로 $\quad f''(1)=2>0$, $f''(-1)=-2<0$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=\mathbf{-2}$이며, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=\mathbf{2}$이다.

(4) $f'(x)=1-2\cos x$이므로 $f'(x)=0$에서
$x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$
$f''(x)=2\sin x$이므로
$f''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}>0$, $f''\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}<0$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$에서 극대이고 극댓값은 $f\left(\dfrac{5}{3}\pi\right)=\mathbf{\dfrac{5}{3}\pi+\sqrt{3}}$이며, $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 극소이고 극솟값은 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\mathbf{\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}}$이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 곡선의 오목과 볼록, 변곡점, 극대와 극소를 이용하여 함수의 그래프를 그릴 수 있게 하려는 것이다.

1. $f'(x)=3x^2-3$, $f''(x)=6x$
$f''(x)>0$, 즉 $x>0$에서 위로 볼록
$f''(x)<0$, 즉 $x<0$에서 아래로 볼록

2. $f''(x)=0$, 즉 $x=0$에서
$f''(0)=0$이고 **1**에서
$x>0$에서 $f''(x)>0$
$x<0$에서 $f''(x)<0$
이므로 변곡점은 $(0,\ 0)$

3. $f'(x)=0$, 즉 $x=1$ 또는 $x=-1$
$x=-1$에서 극대, 극댓값은 $f(-1)=2$
$x=1$에서 극소, 극솟값은 $f(1)=-2$

본문 해설

❶ 증감을 나타내는 표에서 증가와 감소를 각각 ↘, ↗로 나타낸다.
증가와 감소를 오목과 볼록으로 함께 나타낼 때는 ↷, ⤵, ↳, ⤴로 나타낸다.
(1) ↷: 위로 볼록하면서 증가할 때
(2) ⤵: 위로 볼록하면서 감소할 때
(3) ↳: 아래로 볼록하면서 감소할 때
(4) ⤴: 아래로 볼록하면서 증가할 때

지/도/자/료

곡선의 점근선은 다음과 같이 구한다.

(1) $\lim_{x\to a-}|f(x)|=\infty$ 또는 $\lim_{x\to a+}|f(x)|=\infty$
$\iff$ 직선 $x=a$가 점근선

(2) $\lim_{x\to\infty}f(x)=b$ 또는 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=b$
$\iff$ 직선 $y=b$가 점근선

(3) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=a$이고 $\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-ax\}=b$
$\iff$ 직선 $y=ax+b$가 점근선

예를 들어 $f(x)=x+\frac{1}{x}$일 때,

교과서 134 쪽

함수의 그래프의 개형은 어떻게 그리는가?

생각 열기

탐구 활동 함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 이계도함수 $f''(x)$를 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $y=f(x)$의 오목과 볼록을 조사하여 보자.
2. 1을 이용하여 함수 $y=f(x)$의 변곡점을 구하여 보자.
3. 함수 $y=f(x)$의 극값을 구하여 보자.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같은 사항을 조사하고, 종합하면 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 그래프
❶ 함수의 정의역과 치역 ❷ 대칭성과 주기
❸ 좌표축과의 교점 ❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점 ❻ $\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, 점근선

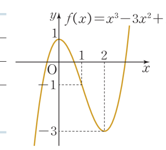
예제 04 함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 그래프의 개형을 그려라.

표에서 ↷, ⤵는 위로 볼록이면서 각각 증가, 감소를 나타내고 ⤴, ↳는 아래로 볼록이면서 각각 증가, 감소를 나타낸다.

풀이 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
$f''(x)=6x-6=6(x-1)$이므로 $f''(x)=0$에서 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

❶

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↷	1 (극대)	⤵	−1 (변곡점)	↳	−3 (극소)	⤴



$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$

$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-x\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$

이므로 직선 $y=x$가 점근선이다.

4

목표 | 다항함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.

풀이 | (1) $f'(x)=3(x+1)(x+3)=0$에서
$x=-1$ 또는 $x=-3$
$f''(x)=6(x+2)=0$에서 $x=-2$
이때, 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	−3	$\cdots$	−2	$\cdots$	−1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↷	2 (극대)	⤵	0 (변곡점)	↳	−2 (극소)	⤴

교과서 135 쪽

문제 4 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $f(x)=x^3+6x^2+9x+2$　　(2) $f(x)=x^4-6x^2+8x+10$

예제 05 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 의 그래프의 개형을 그려라.

풀이 ❶ 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

❷ 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

❸ $f(0)=0$이므로 원점을 지난다.

❹ $f'(x)=\dfrac{-(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$이므로 $f'(x)=0$에서　$x=-1$ 또는 $x=1$

❺ $f''(x)=\dfrac{(x^2+1)(2x^3-6x)}{(x^2+1)^4}=\dfrac{2x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$ 이므로

$f''(x)=0$에서　$x=0$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

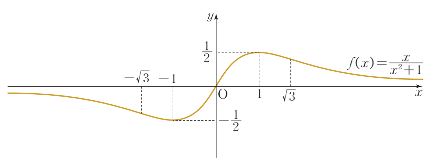
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

원점에 대칭이므로 $x\le 0$ 또는 $x\ge 0$인 경우만 나타내어도 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$ (변곡점)	↘	$-\frac{1}{2}$ (극소)	↗	0 (변곡점)	↗	$\frac{1}{2}$ (극대)	↘	$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (변곡점)	↘

❻ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=0$이므로 x축이 점근선이다.

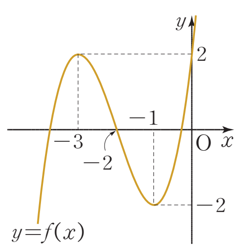
따라서 함수 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



문제 5 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $y=x+\dfrac{1}{x}$　　(2) $y=\dfrac{\ln x}{x}$

따라서 함수 $f(x)=x^3+6x^2+9x+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



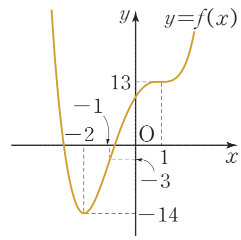
(2) $f'(x)=4(x+2)(x-1)^2=0$에서　$x=-2$ 또는 $x=1$

$f''(x)=12(x-1)(x+1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-14 (극소)	↗	-3 (변곡점)	↗	13 (변곡점)	↗

따라서 함수 $f(x)=x^4-6x^2+8x+10$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



5

목표| 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$이라고 하면

$f'(x)=0$에서　$x=-1$ 또는 $x=1$

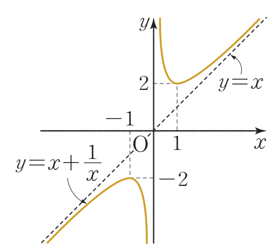
$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$이므로

$f''(1)>0$, $f''(-1)<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=-2$이며, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=2$이다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	-2 (극대)	↘		↘	2 (극소)	↗

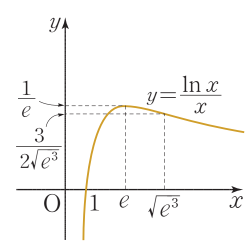
따라서 함수 $y=x+\dfrac{1}{x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$라고 하면

$f'(x)=0$에서　$x=e$

$f''(x)=0$에서　$x=e\sqrt{e}$



x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$ (극대)	↘	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$ (변곡점)	↘

6

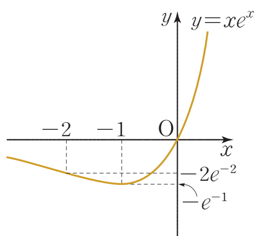
목표 | 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.

풀이 | (1) $f(x)=xe^x$이라고 하면

$f'(x)=e^x(1+x)=0$에서 $\quad x=-1$

$f''(x)=e^x(2+x)=0$에서 $\quad x=-2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-2e^{-2}$ (변곡점)	⤵	$-e^{-1}$ (극소)	⤴

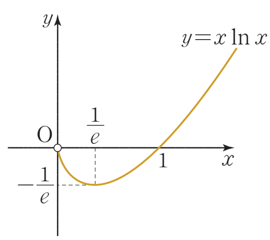


(2) $f(x)=x\ln x$라고 하면

$f'(x)=\ln x+1=0$에서 $\quad x=e^{-1}$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}$

x	0	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$		⤵	$-\dfrac{1}{e}$ (극소)	⤴



(3) $f(x)=\ln(x^2+1)$이라고 하면

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}=0$에서 $\quad x=0$

$f''(x)=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}=0$에서 $\quad x=\pm1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$\ln 2$ (변곡점)	⤵	0 (극소)	⤴	$\ln 2$ (변곡점)	↗

교과서 136 쪽

예제 06 함수 $f(x)=e^{-x^2}$의 그래프의 개형을 그려라.

풀이 ❶ 함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

❷ 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

❸ $f(0)=1$이므로 y축과 교점은 $(0,\ 1)$이다.

❹ $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

❺ $f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2e^{-x^2}(2x^2-1)$

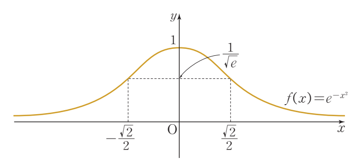
$f''(x)=0$에서 $\quad x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	⤴	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ (변곡점)	↗	1 (극대)	↘	$\frac{1}{\sqrt{e}}$ (변곡점)	⤵

❻ $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x^2}=0$이므로 x축이 점근선이다.

따라서 함수 $f(x)=e^{-x^2}$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

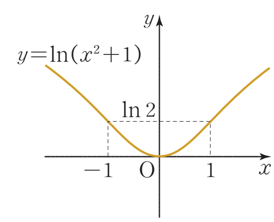


문제 6 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $y=xe^x$ (2) $y=x\ln x$

(3) $y=\ln(x^2+1)$ (4) $y=x+2\sin x\ (0<x<2\pi)$

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 함수 $f(x)$의 극값과 구간 $[a,\ b]$에서의 양 끝 점의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 이용하면 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.



(4) $f(x)=x+2\sin x\ (0<x<2\pi)$로 놓자.

(i) $f(-x)=-x-2\sin x=-f(x)$이므로

$f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

(ii) $f'(x)=1+2\cos x=0$에서 $\quad x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

$f''(x)=-2\sin x=0$에서 $\quad x=\pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$ (극대)	↘	π (변곡점)	⤵	$\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$ (극소)	⤴	

교과서 137 쪽

극댓값과 극솟값이 반드시 최댓값과 최솟값이 되는 것은 아니다.

1 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 극값을 가질 때

[1] $f(x)$의 최댓값은 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이다.

[2] $f(x)$의 최솟값은 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값이다.

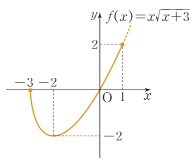
예제 07 구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)=x\sqrt{x+3}$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=\dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$

구간 $[-3,\ 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	-2 (극소)	↗	2



따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 2, $x=-2$일 때 최솟값 -2를 가진다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2

문제 7 다음 함수의 주어진 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^3+3x^2+2\quad [-1,\ 1]$

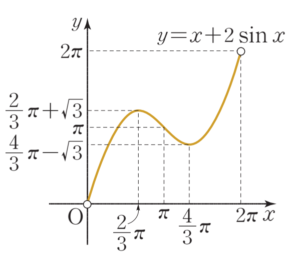
(2) $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+1\quad [-2,\ 0]$

문제 8 다음 함수의 주어진 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=(1+\cos x)\sin x\quad [0,\ \pi]$

(2) $f(x)=-\dfrac{\ln x}{x}\quad [1,\ e^3]$

따라서 함수 $y=x+2\sin x$ $(0<x<2\pi)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



본문 해설

1 일반적으로 최댓값과 최솟값을 구하는 문제는 결국 함수의 그래프를 그린 후 주어진 구간에서 치역을 구하는 문제이다. 미분법을 활용하여 구간에서 극댓값, 극솟값을 구하고, 구간의 양 끝 점의 함숫값을 비교하면 최댓값과 최솟값을 쉽게 구할 수 있다.

함수가 주어진 구간에서 연속이고, 그 구간에서 극값이 하나만 존재할 때,

(i) 극값이 최댓값이면 (극댓값)=(최댓값)이다.

(ii) 극값이 최솟값이면 (극솟값)=(최솟값)이다.

7

목표| 주어진 구간에서 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f'(x)=3x(x+2)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-2$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	4	↘	2 (극소)	↗	6

따라서 **최댓값은 6, 최솟값은 2**이다.

(2) $f'(x)=4x(x-4)(x+1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=4$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	17	↘	-2 (극소)	↗	1

따라서 **최댓값은 17, 최솟값은 -2**이다.

8

목표| 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f'(x)=(2\cos x-1)(\cos x+1)$
$=0$

에서 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (극대)	↘	0

따라서 **최댓값은 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$, 최솟값은 0**이다.

(2) $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{x^2}=0$에서 $x=e$

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^3
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{e}$ (극소)	↗	$-\dfrac{3}{e^3}$

따라서 **최댓값은 0, 최솟값은 $-\dfrac{1}{e}$**이다.

03 방정식과 부등식에의 활용

소단원 지도 목표

① 도함수를 방정식에 활용할 수 있게 한다.
② 도함수를 부등식에 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 도함수를 이용한 방정식과 부등식의 기능적인 풀이보다는 그 원리를 이해할 수 있도록 한다.

2. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같음을 유의하도록 지도한다.

3. 삼차방정식과 사차방정식은 근의 공식이 있으나 고등학교에서는 다루지 않는 내용이므로 그래프의 교점을 이용하여 방정식의 실근의 개수 또는 근의 부호 등을 조사하게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 함수의 그래프를 보고 방정식의 실근의 개수가 함수의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같다는 사실을 알기 위한 활동이다.

1. $x^3-3x-1=0$

2. 3개

본문 해설

❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다. 이것은 방정식의 실근의 개수를 구하는 유용한 도구이다.
방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.
예를 들면 방정식 $f(x)-k=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=k$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

교과서 138 쪽

03 방정식과 부등식에의 활용

● 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.

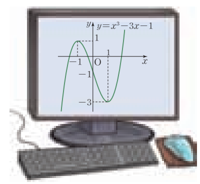
함수의 그래프는 방정식과 부등식에 어떻게 활용되는가?

생각 열기

탐구 활동

함수 $y=x^3-3x-1$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 곡선 $y=x^3-3x-1$이 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하는 방정식을 만들어 보자.
2. 그래프를 이용하여 1에서 구한 방정식의 실근의 개수를 구하여 보자.



❶ 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구하여 보자.

방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같다.

또 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다. 따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

이와 같이 함수의 그래프를 이용하면 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있다.

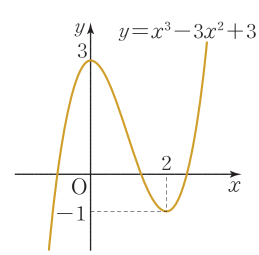
1

목표| 도함수를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=x^3-3x^2+3$이라고 하면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	3 (극대)	↘	−1 (극소)	↗

따라서 방정식 $x^3-3x^2+3=0$의 실근은 3개이다.



(2) $f(x)=2x^4-4x^2+1$이라고 하면

예제 01 방정식 $-x^3+6x^2-9x+2=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

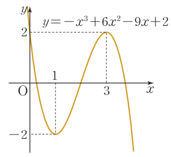
풀이 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+2$라고 하면

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-2	↗	2	↘



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 세 점에서 만나므로 방정식의 서로 다른 실근은 3개이다.

답 3

문제 1 그래프를 이용하여 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

(1) $x^3-3x^2+3=0$ (2) $2x^4-4x^2+1=0$

(3) $e^x-x=2$ (4) $x-\cos x=\frac{1}{2}$

예제 02 방정식 $x-\ln x=k$가 서로 다른 두 실근을 가지기 위한 실수 k값의 범위를 구하여라.

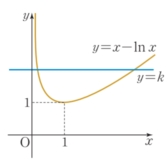
풀이 $f(x)=x-\ln x$라고 하면 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서 $x=1$

또 $\lim_{x\to0+}(x-\ln x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}(x-\ln x)=\infty$이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗



따라서 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지기 위한 k값의 범위는 $k>1$이다.

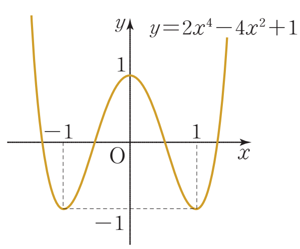
답 $k>1$

문제 2 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 실수 k의 값에 따라 조사하여라.

(1) $x+\frac{4}{x}=k$ (2) $e^x=x+k$

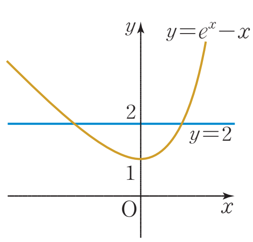
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1 (극소)	↗	1 (극대)	↘	-1 (극소)	↗

따라서 방정식 $2x^4-4x^2+1=0$의 실근은 4개이다.



(3) $f(x)=e^x-x$라고 하면

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1 (극소)	↗



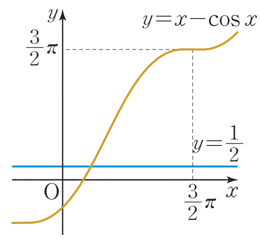
따라서 방정식 $e^x-x=2$의 실근은 2개이다.

(4) $f(x)=x-\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1+\sin x$

≥0

따라서 $f(x)=x-\cos x$는 증가함수이다.



따라서 곡선 $y=x-\cos x$는 $y=\frac{1}{2}$과 한 점에서 만나므로 방정식 $x-\cos x=\frac{1}{2}$의 실근은 1개이다.

2

목표| 도함수를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있게 한다.

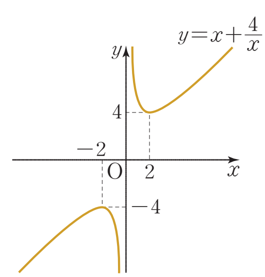
풀이| (1) $f(x)=x+\frac{4}{x}$로 놓으면

$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4 (극대)	↘		↘	4 (극소)	↗

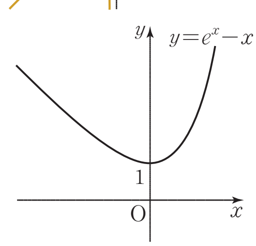
$-4<k<4$일 때, 0개
$k=\pm4$일 때, 1개
$k>4$, $k<-4$일 때, 2개



(2) $f(x)=e^x-x$로 놓으면

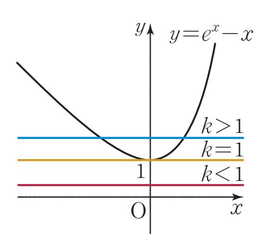
$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$



x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	1 (극소)	↗

$k>1$일 때, 2개
$k=1$일 때, 1개
$k<1$일 때, 0개



3

목표| 도함수를 이용하여 여러 가지 부등식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=e^{-x}-1+x$라고 하면

$f'(x)=-e^{-x}+1$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

$x>0$에서

$f(x)=e^{-x}-1+x>0$

따라서 $\quad e^{-x}>1-x$

(2) $f(x)=x-\ln(1+x)$라고 하면

$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	0	$\cdots$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0	$\nearrow$

$x>0$에서

$f(x)=x-\ln(1+x)>0$

따라서 $\quad x>\ln(1+x)$

교과서 140 쪽

함수의 그래프를 이용하여 부등식을 증명하여 보자.

어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립함을 증명할 때에는 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

또 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\geq g(x)$가 성립함을 증명할 때에는

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 하고 주어진 구간에서 함수 $y=h(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

예제 03 $x\geq 0$일 때, $e^{x-1}>x-1$이 성립함을 증명하여라.

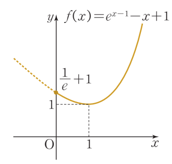
증명 $f(x)=e^{x-1}-x+1$이라고 하면

$f'(x)=e^{x-1}-1$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{e}+1$	$\searrow$	1	$\nearrow$



주어진 구간에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 극소이면서 최소이다. 따라서 최솟값이 $f(1)=1$이므로 $x\geq 0$인 모든 x에 대하여

$f(x)=(e^{x-1})-(x-1)>0$

$e^{x-1}>x-1$

어떤 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)>0 이면 $f(x)>0$이다.

문제 3 $x>0$일 때, 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $e^{-x}>1-x$ $\qquad$ (2) $x>\ln(1+x)$

발전

문제 4 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$일 때, $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$이 성립함을 증명하여라.

창의 up

$f(0)=g(0)$인 미분가능한 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서 $f'(x)>g'(x)$이면 $f(x)\geq g(x)$임을 설명하여라.

4

목표| 도함수를 이용하여 부등식이 성립하는 조건을 알게 한다.

풀이| $f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$이라고 하면

$f'(x)=-\sin x+x$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$-1+\frac{\pi^2}{8}$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서

$f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}>0$

따라서 $\quad \cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$

창의 UP

출제 의도| $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$을 이용하여 $h(x)=f(x)-g(x)\leq 0$을 증명할 수 있게 한다.

풀이| $h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 $f(0)=g(0)$이므로

$h(0)=f(0)-g(0)=0$

또, $f'(x)>g'(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

따라서 $h(x)$는 $h(0)=0$이고 증가함수이므로

구간 $[0,\ \infty)$에서 $\quad h(x)\geq 0$

즉, $f(x)-g(x)\geq 0$이므로 $\quad f(x)\geq g(x)$

중/단/원 기초

1

목표| 곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=x\sqrt{x}$로 놓으면 $\quad f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

교과서 141 쪽

[해답 p.213]

중단원 기초

수준별 학습

1 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.

01 접선의 방정식

(1) $y=x\sqrt{x}$ $(1,\ 1)$

(2) $y=\ln(x+1)$ $(1,\ \ln 2)$

(3) $y=\tan x$ $\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$

2 주어진 곡선에 접하고, 기울기 m이 다음과 같은 접선의 방정식을 구하여라.

01 접선의 방정식

(1) $y=\frac{x-1}{x+1}$ $(x>0)$, $m=\frac{1}{2}$

(2) $y=e^{x-1}$, $m=e$

(3) $y=\cos x$ $(0\le x\le 2\pi)$, $m=1$

3 다음 곡선의 오목과 볼록을 조사하고, 변곡점을 구하여라.

02 함수의 그래프 곡선의 오목과 볼록, 변곡점

(1) $y=xe^{-x}$　　(2) $y=x+\sin x$ $(0<x<2\pi)$

4 다음 함수의 그래프를 그려라.

02 함수의 그래프

(1) $y=\frac{x^2}{x-1}$　　(2) $y=x-2\sqrt{x}$

(3) $y=x-\ln x$　　(4) $y=\sin x-\cos x$ $(0\le x\le \pi)$

5 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

03 방정식과 부등식에의 활용

(1) $e^x-x=0$　　(2) $x+\sin x=\frac{1}{2}$

점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-1=\frac{3}{2}(x-1)$

$\boldsymbol{y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}$

(2) $f(x)=\ln(x+1)$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x+1}$

점 $(1,\ \ln 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y-\ln 2=\frac{1}{2}(x-1)$

$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}+\ln 2}$

(3) $f(x)=\tan x$로 놓으면 $f'(x)=\sec^2 x$

$\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sec^2\frac{\pi}{4}=2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $\boldsymbol{y=2x-\frac{\pi}{2}+1}$

2

목표| 기울기가 주어졌을 때의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$라고 하면

$f'(x)=\frac{2}{(x+1)^2}$

이때, 접점의 좌표를 $\left(a,\ 1-\frac{2}{a+1}\right)$라고 하면 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{2}{(a+1)^2}=\frac{1}{2}$, $a=1$ $(x>0)$

즉, 접점의 좌표가 $(1,\ 0)$이므로

구하는 접선은 점 $(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 $\frac{1}{2}$인 직선이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-1)$, $\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}}$

(2) $f(x)=e^{x-1}$이라고 하면 $f'(x)=e^{x-1}$

이때, 접점의 좌표를 $(a,\ e^{a-1})$이라고 하면 기울기가 e이므로

$e^{a-1}=e$, $a=2$

즉, 접점의 좌표가 $(2,\ e)$이므로 구하는 접선은 점 $(2,\ e)$를 지나고 기울기가 e인 직선이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-e=e(x-2)$, $\boldsymbol{y=ex-e}$

(3) 접점의 x좌표를 a라고 하면 $1=-\sin a$에서 $a=\frac{3}{2}\pi$

즉, 접점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}\pi,\ 0\right)$

따라서 접선의 방정식은

$y-0=1\cdot\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)$, $\boldsymbol{y=x-\frac{3}{2}\pi}$

3

목표| 곡선의 오목, 볼록한 구간을 구하고 변곡점을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=xe^{-x}$이라고 하면

$y'=e^{-x}(1-x)$, $y''=e^{-x}(x-2)$

$y''=0$에서 $x=2$이고 $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면

$x<2$일 때 $f''(x)<0$, 위로 볼록

$x>2$일 때 $f''(x)>0$, 아래로 볼록

이고, 변곡점은 $\left(2,\ \dfrac{2}{e^2}\right)$이다.

(2) $y'=1+\cos x$, $y''=-\sin x$이고

$y''=0$에서 $x=\pi$ $(0<x<2\pi)$

$0<x<\pi$일 때 $y''<0$, 위로 볼록

$\pi<x<2\pi$일 때 $y''>0$, 아래로 볼록

이고 변곡점은 $(\pi,\ \pi)$이다.

4

목표| 함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$이라고 하면

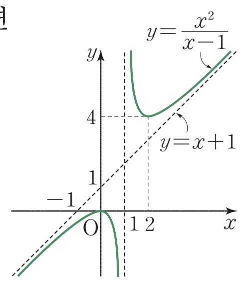
$f'(x)=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=0$

에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$f''(x)=\dfrac{2}{(x-1)^3}$이고,

$\dfrac{x^2}{x-1}=x+1+\dfrac{1}{x-1}$

이므로 점근선은 $x=1$, $y=x+1$이다.

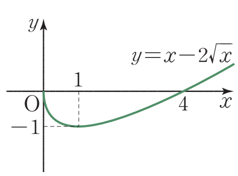


x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↗	0 (극대)	↘		↘	4 (극소)	↗

(2) $f(x)=x-2\sqrt{x}$라고 하면

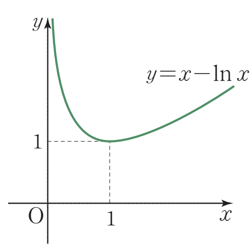
$f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$에서 $x=1$, $f''(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	-1 (극소)	↗



(3) $f(x)=x-\ln x$로 놓으면 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1 (극소)	↗

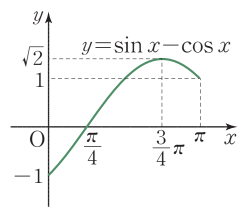


(4) $f(x)=\sin x-\cos x$라고 하면

$f'(x)=\cos x+\sin x=0$에서 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ $(0\le x\le\pi)$

$f''(x)=-\sin x+\cos x=0$에서 $x=\dfrac{\pi}{4}$ $(0\le x\le\pi)$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	-1	↗	0 (변곡점)	↗	$\sqrt{2}$ (극대)	↘	1



5

목표| 미분을 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있게 한다.

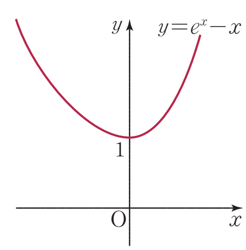
풀이| (1) $f(x)=e^x-x$로 놓으면 $f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

모든 실수 x에 대하여 $f''(x)=e^x>0$이므로 $f'(x)$는 증가한다. 또 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이다.

$f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내고 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	1 (극소)	↗



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 $y=e^x-x$와 x축과의 교점의 개수와 같으므로 실근의 개수는 **0**이다.

(2) $f(x)=x+\sin x$라 하면 $f'(x)=1+\cos x\ge0$이므로 함수 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 $f(x)=x+\sin x$와 직선 $y=\dfrac{1}{2}$이 한 점에서 만나므로 실근의 개수는 **1**이다.

교과서 142 쪽

중단원 기본

[해답 p.213]

수준별 학습

1 곡선 $y=\sqrt{x-2}$ 위의 점 $(3,\ 1)$을 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.

01 접선의 방정식

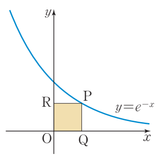
2 점 $(3,\ 2)$에서 곡선 $y=\dfrac{x-1}{x}$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

01 접선의 방정식

3 곡선 $y=\ln(x^2-2x+2)$의 두 변곡점 사이의 거리를 구하여라.

02 함수의 그래프
변곡점

4 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서 x축과 y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라고 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이의 최댓값을 구하여라.



02 함수의 그래프
최댓값과 최솟값

5 두 함수 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=a\ln x$에 대하여 $x>0$일 때, $f(x)\ge g(x)$가 성립하도록 하는 양수 a값의 범위를 구하여라.

03 방정식과 부등식에의 활용

중/단/원 기본

1

목표| 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\sqrt{x-2}$라고 할 때, 곡선 위의 점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 기울기는

$f(x)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$에서 $f'(3)=\dfrac{1}{2}$

따라서 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-2(x-3)$, 즉 $\boldsymbol{y=-2x+7}$

2

목표| 곡선 밖에 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\dfrac{x-1}{x}$이라고 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(a,\ \dfrac{a-1}{a}\right)$이라고 하면

$f'(a)=\dfrac{1}{a^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{a-1}{a}=\dfrac{1}{a^2}(x-a)$ ...... ①

점 $(3,\ 2)$를 지나므로 $a=-3$ 또는 $a=1$

따라서 $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{9}x+\dfrac{5}{3}}$ **또는** $\boldsymbol{y=x-1}$

3

목표| 곡선의 변곡점을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y'=\dfrac{2x-2}{x^2-2x+2}$, $y''=\dfrac{-2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2}$

$y''=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$x=0$, $x=2$의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌므로 $(0,\ \ln 2)$, $(2,\ \ln 2)$는 곡선 $y=\ln(x^2-2x+2)$의 변곡점이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는 **2**이다.

4

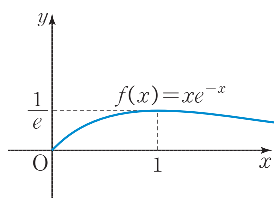
목표| 미분을 이용한 최댓값 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 P의 좌표를 $(x,\ e^{-x})$이라고 하면

$\overline{\mathrm{PR}}=x$, $\overline{\mathrm{PQ}}=e^{-x}$

□OQPR의 넓이를 $f(x)$라고 할 때, $f(x)=xe^{-x}$이고 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 □OQPR의 넓이의 최댓값은 $\boldsymbol{\dfrac{1}{e}}$이다.



5

목표| 미분을 부등식에 활용할 수 있게 한다.

풀이| $x>0$일 때 $h(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-a\ln x\ge 0$이 성립하므로 $h(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같으면 된다.

$h'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{a}{x}=0$에서 $x=4a^2$

x	0	$\cdots$	$4a^2$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	$2a-a\ln 4a^2$	$\nearrow$

$h(x)$는 $x=4a^2$일 때, 최솟값 $2a-a\ln 4a^2$ $(a>0)$을 가지므로 $2a-a\ln 4a^2\ge 0$, $4a^2\le e^2$, $\boldsymbol{0<a\le\dfrac{e}{2}}$

중/단/원 실력

교과서 143 쪽

중단원 실력

[해답 p.214]

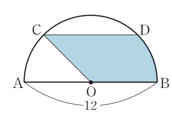
수준별 학습

1 x축 위의 점 $(t,\ 0)$에서 곡선 $y=e^{-x^2}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있을 때, t값의 범위를 구하여라. — 01 접선의 방정식

2 함수 $f(x)=xe^{ax+b}$이 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$을 가질 때, 상수 a, b의 값을 구하여라. — 02 함수의 그래프

3 곡선 $y=ax^2+x+2\sin x$가 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 변곡점을 가지기 위한 상수 a값의 범위를 구하여라. — 02 함수의 그래프 변곡점

4 오른쪽 그림과 같이 지름 AB의 길이가 12인 반원에서 지름에 평행한 현 CD를 그을 때 생기는 도형 OBDC의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 O는 반원의 중심) — 02 함수의 그래프 최댓값과 최솟값



5 방정식 $\frac{3}{x^2-4x+7}=k$가 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k값의 범위를 구하여라. — 03 방정식과 부등식에의 활용

1

목표 | 미분을 이용하여 접선의 방정식에 활용할 수 있게 한다.

풀이 | $f(x)=e^{-x^2}$이라고 하면
$f'(x)=-2xe^{-x^2}$
접점의 좌표를 $(a,\ e^{-a^2})$이라고 하면 접선의 방정식은 $y-e^{-a^2}=-2ae^{-a^2}(x-a)$
이 접선은 점 $(t,\ 0)$을 지나므로
$-e^{-a^2}=-2ae^{-a^2}(t-a)$, $2a^2-2ta+1=0$
이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 때 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으므로
$\frac{D}{4}=t^2-2>0$에서 $\boldsymbol{t<-\sqrt{2}}$ **또는** $\boldsymbol{t>\sqrt{2}}$

2

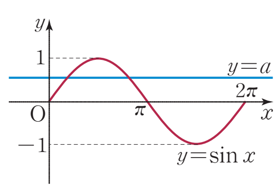
목표 | 도함수를 이용하여 함수의 극값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $f'(x)=e^{ax+b}(1+ax)$이고
$f(x)=xe^{ax+b}$이 $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{e}$을 가지므로 $f'(-1)=0$에서
$e^{-a+b}(1-a)=0$, $\boldsymbol{a=1}$
$f(x)=xe^{x+b}$이고 $f(-1)=-\frac{1}{e}$이므로
$-e^{-1+b}=-e^{-1}$, $\boldsymbol{b=0}$

3

목표 | 곡선의 변곡점을 구할 수 있게 한다.

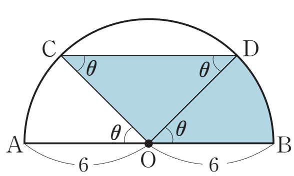
풀이 | $y'=2ax+1+2\cos x$,
$y''=2a-2\sin x=0$
즉, $\sin x=a$를 만족시키는 x값의 좌우에서 y''의 부호가 바뀌면 곡선의 오목과 볼록이 바뀐다. 따라서 $\boldsymbol{-1<a<1}$



4

목표 | 최댓값 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이 |



$\angle BOD=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면 도형 OBDC의 넓이 $S(\theta)$는
$S(\theta)=$(부채꼴 BOD의 넓이)$+$($\triangle$COD의 넓이)
$\quad=\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\theta+\frac{1}{2}\cdot 6^2\cdot\sin(\pi-2\theta)$
$\quad=18(\theta+\sin 2\theta)\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)=18(1+2\cos 2\theta)$
$S'(\theta)=0$에서 $\cos 2\theta=-\frac{1}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{3}$

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$	0	↗	$6\pi+9\sqrt{3}$	↘	9π

따라서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로
도형 OBDC의 넓이의 최댓값은 $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\boldsymbol{6\pi+9\sqrt{3}}$

교과서 144 쪽

수행 과제

보일 법칙

오른쪽 그림은 비행기가 이륙하기 전과 이륙한 후의 과자 봉지의 모양이다.

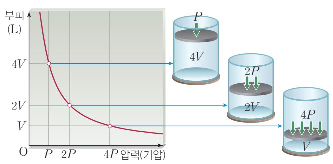
비행기 내의 온도가 일정한 상태에서 고도가 높아지면 기압은 낮아지므로 과자 봉지는 팽창하게 된다.

영국의 과학자 보일(Boyle, R. ; 1627~1691)은 온도가 일정할 때 기체의 부피는 압력에 반비례한다는 사실을 발견하였다.

즉, 온도가 일정할 때 기체의 부피 V는 압력 P에 반비례하므로 $P_0V_0=PV$인 관계가 성립한다. 이것을 보일 법칙이라고 한다.

이륙하기 전의 과자 봉지(0.994기압)

이륙한 후의 과자 봉지(0.790기압)



25 ℃에서 공기의 부피 $V(\mathrm{m}^3)$와 압력 $P(\mathrm{kPa})$ 사이에 $PV=5.3$의 관계가 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

| 과 제 | **1** $P=10(\mathrm{kPa})$일 때, 부피 V를 구하여 보자.

| 과 제 | **2** 압력이 $P=p$에서 $P=p+h$로 변할 때, 부피 V의 평균변화율을 구하여 보자.

| 과 제 | **3** $P=10(\mathrm{kPa})$일 때, 부피 V의 순간변화율을 구하여 보자.

교과서 145 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 함수의 몫의 미분법

함수의 몫의 미분법

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ $(g(x)\neq0)$에 대하여

(1) $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(2) $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}'=-\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

함수 $y=x^a$ (a는 실수)의 도함수

실수 a에 대하여 함수 $y=x^a$의 도함수는

$$y'=ax^{a-1}$$

2 합성함수의 미분법

미분가능한 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여 합성함수 $y=f(g(x))$는 미분가능하며, 그 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

3 역함수의 미분법

함수 $f(x)$가 미분가능하고, 그 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능할 때, $y=f^{-1}(x)$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \text{ 또는 } (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

4 이계도함수

함수 $y=f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 미분가능할 때, $f'(x)$의 도함수

$$f''(x)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

를 $f(x)$의 이계도함수라고 한다.

5 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

6 함수의 그래프

함수의 오목과 볼록, 변곡점

(1) 함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서
① $f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하다.
② $f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

(2) 함수 $f(x)$에서 $f''(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

함수의 그래프

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음을 고려하여 그리면 편리하다.
❶ 함수의 정의역과 치역
❷ 대칭성과 주기
❸ 좌표축과의 교점
❹ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소
❺ 곡선의 오목과 볼록, 변곡점
❻ $\lim_{x\to\infty}f(x)$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)$, 점근선

7 방정식과 부등식에의 활용

방정식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표이다.

(2) 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

부등식에의 활용

(1) $f(x)\ge0$이 성립함을 증명할 때에는 주어진 구간에서 $y=f(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보인다.

(2) $f(x)\ge g(x)$가 성립함을 증명할 때에는 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고, 주어진 구간에서 $y=h(x)$의 최솟값이 0보다 크거나 같음을 보인다.

| 용어와 기호 | 이계도함수, 변곡점, $f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $\dfrac{d^2}{dx^2}f(x)$

5

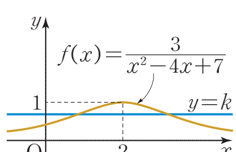
목표| 미분을 부등식에 활용할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\dfrac{3}{x^2-4x+7}$이라고 하면

$f'(x)=\dfrac{-3(2x-4)}{(x^2-4x+7)^2}$이고 $f'(x)=0$에서 $x=2$

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$



따라서 구하는 k값의 범위는 $\mathbf{0<k<1}$

수행 과제

● 수행 과제 의도

보일 법칙에서 압력과 부피와의 관계를 이해하고 부피의 평균변화율과 순간변화율의 의미를 이해하게 한다.

과제 1_풀이 $10V=5.3$에서 $V=\mathbf{0.53}$

과제 2_풀이 $V=\dfrac{5.3}{P}$에서 $h>0$에 대하여 P가 p에서 $p+h$까지 변할 때, 부피 V의 평균변화율은

$$\frac{5.3\left(\frac{1}{p+h}-\frac{1}{p}\right)}{(p+h)-p}=\frac{\frac{-5.3h}{p(p+h)}}{h}=\boldsymbol{\frac{-5.3}{p(p+h)}}$$

과제 3_풀이 $p=10$일 때, 부피 V의 순간변화율은

$$\lim_{h\to0}\frac{-5.3}{10(10+h)}=\mathbf{-0.053}$$

대/단/원 평가 문제

교과서 146 쪽

대/단/원 평가 문제

선택형

1 함수 $y=\dfrac{2x^3+3x^2-x+1}{x^2}$에 대하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구하면?

① $2x+\dfrac{1}{x^3}$ ② $2+\dfrac{3-x}{x^2}$ ③ $2+\dfrac{2x-1}{x^3}$ ④ $2+\dfrac{x-2}{x^3}$ ⑤ $3x-1+\dfrac{1}{x^2}$

2 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(2)=3$, $f'(2)=3$, $g(1)=2$, $g'(1)=4$를 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(g(x))-3}{x-1}$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

3 미분가능한 함수 $f(x)$와 그 역함수 $g(x)$에 대하여 $f(a)=b$, $f'(a)=c$일 때, $g'(b)$의 값은?

① $\dfrac{1}{a}$ ② $\dfrac{1}{b}$ ③ $\dfrac{1}{c}$ ④ a ⑤ b

4 함수 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x+1}$에 대하여 $f(0)+f'(0)$의 값은?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

5 함수 $y=\dfrac{(x-3)^2(x-1)}{(x-2)^3}$의 도함수는?

① $y'=\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-2)^4}$
② $y'=\dfrac{(x+1)^2(x-3)}{(x-2)^4}$
③ $y'=\dfrac{(x+2)(x-3)}{(x-2)^4}$
④ $y'=\dfrac{(x+2)^2(x-3)}{(x-2)^4}$
⑤ $y'=\dfrac{(x+1)(x+2)(x-3)}{(x-2)^4}$

6 곡선 $y=\tan(\sin x)$ 위의 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기는?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

7 곡선 $y=x-x\ln x$에 접하고 직선 $x-y+2=0$과 평행한 직선의 방정식은?

① $y=x+e$ ② $y=x-e$ ③ $y=x-1$ ④ $y=x+\dfrac{1}{e}$ ⑤ $y=x+\dfrac{2}{e}$

8 두 곡선 $y=a-\sin^2 x$와 $y=\cos x$가 $x=t$에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a의 값은? (단, $0<t<\pi$)

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{5}{4}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

1

목표| n이 정수일 때, $y=x^n$의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=2x+3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx}=2+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}=2+\frac{x-2}{x^3}$$

답 ④

2

목표| 합성함수를 미분할 수 있게 한다.

풀이| $f(2)=3,\ g(1)=2$에서 $f(g(1))=3$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(g(x))-f(g(1))}{x-1}$$
$$=f'(g(1))g'(1)=f'(2)\cdot4=3\times4=12$$

답 ⑤

3

목표| 역함수를 미분할 수 있게 한다.

풀이| $f(a)=b$이고 $g(x)$가 $f(x)$의 역함수이므로 $g(b)=a$

$$g'(b)=\frac{1}{f'(g(b))}=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{c}$$

답 ③

4

목표| 몫의 미분법, 합성함수의 미분법 등을 이용하여 복잡한 함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=\dfrac{\cos x(e^x+1)-(\sin x)e^x}{(e^x+1)^2}$

$$f(0)+f'(0)=0+\frac{1\times2}{4}=\frac{1}{2}$$

답 ②

5

목표| 로그함수의 미분법을 이용하여 복잡한 함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\ln|y|=\ln\left|\dfrac{(x-3)^2(x-1)}{(x-2)^3}\right|$,

$$\ln|y|=2\ln|x-3|+\ln|x-1|-3\ln|x-2|$$
$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x-2}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$
$$y'=y\cdot\frac{x+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)^4}$$

답 ①

6

목표| 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y'=\{\sec^2(\sin x)\}(\sin x)'=\{\sec^2(\sin x)\}\cos x$

$x=\pi$에서의 접선의 기울기는

$$\{\sec^2(\sin\pi)\}\cos\pi=\sec^2 0\times(-1)$$
$$=\frac{1}{\cos^2 0}\times(-1)=-1$$

답 ③

7

목표| 기울기가 주어졌을 때의 곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $y'=1-(\ln x+1)=-\ln x$이고, 구하는 직선은 직선 $x-y+2=0$과 평행하므로 기울기는 1이다.

[해답 p.214]

9 함수 $f(x)=xe^x$의 그래프에 대한 다음 설명 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\lim_{x \to -\infty} f(x)=0$이다.
ㄴ. 변곡점의 좌표는 $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$이다.
ㄷ. 극솟값은 $x=-1$일 때, $-\frac{1}{e}$이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)=ax-a\sin 2x$의 최댓값이 π일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>0$)

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

11 방정식 $e^x=kx$에 대한 다음 설명 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 상수)

ㄱ. $k>e$이면 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㄴ. $0 \le k<e$이면 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. $k<0$ 또는 $k=e$이면 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12 $x>0$일 때, $e^x-x>k$가 성립하기 위한 실수 k 값의 범위는?

① $k \le -2$　② $k \le -1$　③ $k \le 0$
④ $k \le 1$　⑤ $k \le 2$

서답형

13 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(2x+1)=x^2-4x+3$일 때, $f'(5)$의 값을 구하여라.

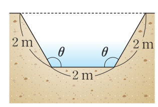
14 곡선 $y=\sqrt{2x}$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$에 접하였다. 상수 m, n에 대하여 $m-2n$의 값을 구하여라.

|서|술|형|

15 함수 $f(x)=(\ln x)^2$에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{x-1}$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 어느 공장에서 필요한 물을 끌어오기 위해 수로를 설치하려고 한다. 수로의 단면은 다음 그림과 같이 각 변의 길이가 2 m라고 할 때, 단면의 넓이의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라. $\left(\text{단, } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$



접점의 x좌표를 a라 하면

$-\ln a=1$에서　$a=\frac{1}{e}$

따라서 점 $\left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은　$y-\frac{2}{e}=\left(x-\frac{1}{e}\right)$, $y=x+\frac{1}{e}$

답 ④

8

목표| 도함수를 이용하여 두 함수의 공통인 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=a-\sin^2 x$, $g(x)=\cos x$라 하면

$f'(x)=-2\sin x\cos x$, $g'(x)=-\sin x$

$x=t$에서 공통인 접선을 가지므로 $f'(t)=g'(t)$에서

$-2\sin t\cos t=-\sin t$,

$\cos t=\frac{1}{2}$, $t=\frac{\pi}{3}$　$(0<t<\pi)$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)$에서　$a-\sin^2\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{3}$, $a=\frac{5}{4}$

답 ③

9

목표| 함수의 그래프의 개형을 이해할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=e^x(1+x)=0$에서　$x=-1$

$f''(x)=e^x(2+x)=0$에서　$x=-2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-2e^{-2}$ (변곡점)	↘	$-e^{-1}$ (극소)	↗

ㄱ. $\lim_{x \to -\infty} f(x)=0$ (참)

ㄴ. 변곡점의 좌표는 $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$ (참)

ㄷ. 극솟값은 $x=-1$일 때　$-\frac{1}{e}$ (참)

답 ⑤

10

목표| 함수의 그래프를 이용하여 구간에서 정의된 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=a-2a\cos 2x$이고

$f'(x)=0$에서　$x=\frac{\pi}{6}$ $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

구간 $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서　$f(0)=0$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi a}{6}-a\sin\frac{\pi}{3}=a\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi a}{2}$

$a>0$이므로 최댓값은 $\frac{\pi a}{2}$이고　$\frac{\pi a}{2}=\pi$이므로　$a=2$

답 ②

11

목표| 도함수를 방정식에 활용할 수 있게 한다.

풀이| 방정식 $e^x=kx$의 실근의 개수는 두 함수 $f(x)=e^x$, $g(x)=kx$의 교점의 개수이다.

함수 $f(x)=e^x$의 접점의 좌표를 (a, e^a)이라고 하면

$f'(x)=e^x$에서 기울기가 e^a이므로　$y-e^a=e^a(x-a)$

이 직선은 원점을 지나므로　$0-e^a=e^a(0-a)$, $a=1$

$y=ex$, 즉 $k=e$일 때 한 점에서 만난다.

ㄱ. $k>e$이면 서로 다른 실근의 개수는 2이다. (참)

ㄴ. $0 \le k < e$이면 두 함수가 만나지 않으므로 실근의 개수는 0이다. (거짓)

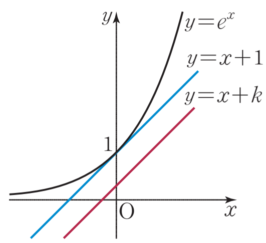
ㄷ. $k<0$ 또는 $k=e$이면 서로 다른 실근의 개수는 1이다. (참)

답 ③

12

목표| 도함수를 부등식에 활용할 수 있게 한다.

풀이| $e^x - x > k \Longleftrightarrow e^x > x+k$



$x>0$일 때, 곡선 $y=e^x$이 직선 $y=x+k$의 위쪽에 있어야 한다. 이때 $y=x+k$에 평행한 $y=e^x$의 접선을 구하면 $y=x+1$이다.

따라서 $x>0$일 때 $e^x > x+1$이므로 $k \le 1$

답 ④

13

목표| 합성함수를 미분할 수 있게 한다.

풀이| $2f'(2x+1)=2x-4$, $f'(2x+1)=x-2$

$2x+1=5$에서 $x=2$이므로

$f'(5)=f'(2\times2+1)=2-2=0$

답 0

14

목표| 곡선의 접선에 대한 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\sqrt{2x}$라고 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$

기울기가 $\dfrac{1}{2}$인 접점의 좌표를 $(a, \sqrt{2a})$라고 하면

$\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$, $a=2$이고 접점의 좌표는 $(2, 2)$

따라서 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이고 점 $(2, 2)$를 지나는 접선의 방정식은 $y-2=\dfrac{1}{2}(x-2)$, $y=\dfrac{1}{2}x+1$

직선 $y=\dfrac{1}{2}x+1$을 x축의 방향으로 m, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{m}{2}+1+n$

이 직선이 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$과 같으므로 $m-2n=-5$

답 -5

15

목표| 이계도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}$이므로 $f'(1)=0$

$$\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)$$

$f''(x)=\dfrac{2}{x^2}+2\ln x\cdot\dfrac{-1}{x^2}$이므로 $f''(1)=2$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=2$

답 2

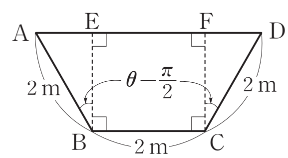
채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$f'(1)=0$인 것을 확인하기	30%
	주어진 식에서 $f''(1)$을 유도하기	40%
답 구하기	$f''(x)$에서 $f''(1)$의 값 구하기	30%

16

목표| 함수의 그래프를 이용하여 구간에서 정의된 함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이 수로의 단면을 등변사다리꼴 ABCD로 나타내고, 꼭짓점 B, C에서 변 AD에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하면



$\angle \mathrm{ABE}=\angle \mathrm{DCF}=\theta-\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{DF}}=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=-2\cos\theta$ (m),

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{CF}}=2\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin\theta$ (m)

수로의 단면의 넓이를 $S(\theta)\mathrm{m}^2$라고 하면

$S(\theta)=$(등변사다리꼴 ABCD의 넓이)

$\quad=4\sin\theta-4\cos\theta\sin\theta(\mathrm{m}^2)$

$S'(\theta)=4\cos\theta-4(-\sin^2\theta+\cos^2\theta)=0$에서

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$에서 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$

θ	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$S'(\theta)$		+	0	−	
$S(\theta)$	4	↗	$3\sqrt{3}$	↘	0

따라서 수로의 단면의 넓이 $S(\theta)$는 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$일 때 최대이고 최댓값은 $3\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$

답 $3\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	단면의 넓이의 식 $S(\theta)$ 구하기	50%
	$S'(\theta)=0$인 θ 구하기	30%
답 구하기	단면의 넓이의 최댓값 구하기	20%

교과서 148 쪽

M+ History

수학 ✚ 역사

방정식의 실근의 어림한 값 구하기

뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)은 다음과 같이 도함수를 이용하여 방정식 $f(x)=0$의 무리수인 근 r의 어림값을 구하는 방법을 생각하였다.

1단계 x축 위에 적당한 점 x_0을 정하고 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x_0,\ f(x_0))$에서의 접선의 방정식 $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$을 구한다.

2단계 $f'(x_0)\neq 0$이라 할 때, 이 접선이 x축과 만나는 점의 x좌표 x_1을 다음과 같이 구한다.

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

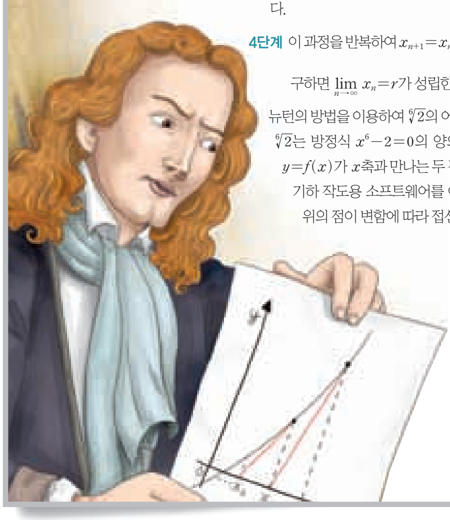
3단계 이렇게 해서 얻어진 새로운 x_1을 가지고 **1, 2단계**를 반복하여 얻어진 값을 x_2라고 한다.

4단계 이 과정을 반복하여 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$을 만족시키는 수열 $\{x_n\}$ (단, $n\geq 0$)을 구하면 $\lim_{n\to\infty} x_n=r$가 성립한다.

뉴턴의 방법을 이용하여 $\sqrt[6]{2}$의 어림한 값을 구하여 보자.

$\sqrt[6]{2}$는 방정식 $x^6-2=0$의 양의 실근이므로 함수 $f(x)=x^6-2$라고 하면 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 두 점의 x좌표 중에서 양수인 것을 구하면 된다.

기하 작도용 소프트웨어를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고 그래프 위의 점이 변함에 따라 접선이 어떻게 변하는지 살펴보자.



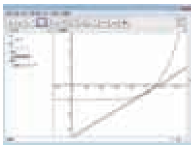
교과서 149 쪽

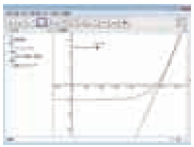
먼저 입력창에 '$f(x)=x^6-2$'를 입력하여 함수 $f(x)=x^6-2$의 그래프를 그린 다음에 도구 상자의 '기하창 이동' 아이콘 을 누르고 마우스를 이용하여 함수 $f(x)$의 그래프가 x축의 양의 부분과 만나는 점의 근방으로 그래프를 옮긴다.

입력창에 새로운 수 'A=1'을 입력하고 도구 상자의 '새로운 점' 아이콘 을 누른 다음에 함수 $f(x)$의 그래프 위에 새로운 점 B를 찍고 점 B를 두 번 클릭하여 설정사항에서 점 B의 좌표를 '(A, f(A))'로 재정의한다.

도구 상자의 '접선' 아이콘 을 누르고 함수 $f(x)$의 그래프와 그래프 위의 점 B를 선택하면 점 B(1, f(1))에서의 접선이 그려진다.

대수창에서 수 'A=1'을 마우스 오른쪽 단추로 눌러서 대상을 보이게 설정하면 수 A의 값을 변화시킬 수 있는 슬라이더 막대가 기하창에 표시된다. 이 슬라이더 막대를 두 번 클릭하여 설정사항에서 구간의 최솟값을 0.8로, 최댓값을 1.3으로, 증가량을 0.01로 설정한 다음에 좌우 방향키를 이용하여 슬라이더 막대의 A의 값을 변화시키면 점 B가 움직이며 접선이 변하는 모습을 볼 수 있다.





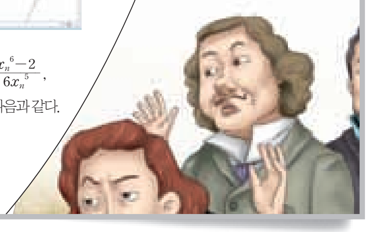
실제로 $f(x_n)=x_n^{\,6}-2$이고 $f'(x_n)=6x_n^{\,5}$이므로 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^{\,6}-2}{6x_n^{\,5}}$,

$x_1=1$로 놓고 계산기를 사용하여 $x_2, x_3, x_4, \cdots$를 차례로 계산하면 다음과 같다.

$x_2=1.166666667$, $x_3=1.126443678$, $x_4=1.122497067$,

$x_5=1.122462051$, $x_6=1.122462048$, $\cdots$

따라서 $\sqrt[6]{2}$는 약 1.122462048임을 알 수 있다.




TAKE

Ⅳ 적분법

자연스러운 움직임을 표현하는 동영상은 수 많은 사진으로 이루어진다.

|준|비|학|습|

미적분 Ⅰ 부정적분

1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (3x^2+8x)dx$ x^3+4x^2+C　　(2) $\int (x-2)(x+1)dx$ $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$

미적분 Ⅰ 정적분

2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^2 (2x^3-3x^2+2x-4)dx$ $-\frac{1}{2}$　　(2) $\int_1^3 (x-1)(x+2)dx$ $\frac{26}{3}$

미적분 Ⅰ 정적분의 활용

3 곡선 $y=(x+1)(3-x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라. $\frac{32}{3}$

단원의 지도 목표

1. 여러 가지 적분법

① 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
② 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.
③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있게 한다.

2. 정적분의 활용

① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.
② 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 적분에 필요한 공식은 미분법의 공식에서 유도하도록 한다.
② 정적분의 다양한 활용을 통해 적분 개념이 실생활에 유용함을 인식하게 한다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습

[미적분 Ⅰ]
- 수열의 극한
- 함수의 극한과 연속성
- 다항함수의 미분법
- 다항함수의 적분법

[미적분 Ⅱ]
- 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프
- 지수함수와 로그함수의 미분
- 삼각함수의 뜻과 그래프
- 삼각함수의 미분
- 여러 가지 미분법
- 도함수의 활용

본 단원

1. 여러 가지 적분법
   - 여러 가지 함수의 부정적분
   - 치환적분법
   - 부분적분법
   - 여러 가지 함수의 정적분

2. 정적분의 활용
   - 넓이
   - 부피

후속 학습

[기하와 벡터]
- 평면 곡선의 접선

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~2	150~151	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 여러 가지 적분법	중단원 도입		152	• 소유즈 호의 중력장 탈출 에너지	
	01 여러 가지 함수의 부정적분		153~156	• 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분 • 삼각함수의 부정적분 • 지수함수의 부정적분	
	02 치환적분법	3~5	157~161	• 치환적분법 • $\frac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분 • 유리함수의 부정적분	치환적분법
	03 부분적분법	6	162~163	• 부분적분법	부분적분법
	04 여러 가지 함수의 정적분	7~10	164~170	• $y=x^n$ (n은 실수), 삼각함수, 지수함수의 정적분 • 정적분의 치환적분법 • 정적분의 부분적분법	
	수준별 학습	11	171~173	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 정적분의 활용	중단원 도입	12~15	174	• 적분은 넓이를 구하는 것에서 출발하여 부피를 구하는 것으로 발전하였다.	
	01 넓이		175~180	• 곡선과 x축 사이의 넓이 • 두 곡선 사이의 넓이	
	02 부피	16~17	181~183	• 입체도형의 부피	
	컴퓨터 활용		184	• 삼각함수의 정적분을 구하여 보자.	
	수준별 학습	18	185~187	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		19~20	188~193	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 이론적 배경

고등학교에서 배우는 적분은 코시 적분이다. 이 적분은 연속함수와 (불연속점이 유한 개인) 구분적 연속함수를 다루기에 적절하다.

그런데 리만(Riemann, G. F. B. ; 1826~1866)은 좀 더 일반적인 함수, 이를테면 임의의 유한 구간에 불연속점이 무수히 많은 함수의 적분에 대한 논문을 1852년경에 썼다. 그러나 이 논문은 그가 죽은 뒤인 1867년에 발표되었다. 이 논문의 '삼각급수에 의한 함수의 표현에 대하여'에서는 각 소구간에서 임의로 선택한 점 $\eta_k^* \in [x_{k-1},\ x_k]$에 대하여 다음 값을 생각하였다.

$$S=\sum_{k=1}^{n} f(\eta_k^*)\Delta x_k$$

그리고 Δx_k의 최댓값이 0에 수렴할 때 S가 일정한 값 V에 수렴하면, 즉 임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여 Δx_k의 최댓값이 δ보다 작은 모든 분할에 대하여 $|S-V|<\varepsilon$이면, 함수 f는 구간 $[a,\ b]$에서 (리만)적분가능하다라 하고, 이를 기호

$$V=\int_a^b f(x)dx$$

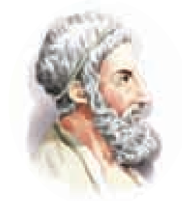
로 나타내었다.

리만의 정의는 코시의 정의와 매우 유사하다. 그러나 코시가 연속함수에서 출발한 반면에 리만은 유계인 함수에서 출발했고, 소구간의 한쪽 끝점을 선택한 코시와 달리 리만은 소구간의 임의의 점을 선택했다.

이렇게 리만 적분은 융통성이 커졌으며, 특히 이것은 적분의 존재에 대한 필요충분조건을 확립할 수 있게 했다.

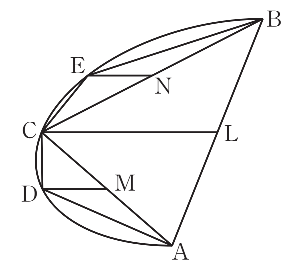
2. 적분법 개념의 발달

적분법의 개념은 미분법의 개념과는 독립적으로 발달하였다. 그 기원은 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 처음으로 논의한 그리스 시대로 거슬러 올라 간다.


아르키메데스

아르키메데스(Archimedes ; ?B.C. 287~B.C. 212)는 포물선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 다음과 같이 구하였다.

오른쪽 그림과 같이 선분 AB, CA, CB의 중점을 지나고 포물선의 축에 평행한 선분 LC, MD, NE를 그어 포물선과 만나는 점을 C, D, E라 하면 포물선의 기하학적 성질로부터 다음이 성립함을 밝혔다.



$$\triangle CDA+\triangle CEB=\frac{1}{4}\triangle ABC$$

아르키메데스는 이러한 생각을 반복하여 포물선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 다음과 같이 구하였다.

$$\triangle ABC+\frac{\triangle ABC}{4}+\frac{\triangle ABC}{4^2}+\frac{\triangle ABC}{4^3}+\cdots$$
$$=\triangle ABC\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots\right)$$
$$=\frac{4}{3}\triangle ABC$$

3. 카발리에리의 불가분량의 방법

갈릴레이는 '$0\le x\le a,\ 0\le y\le f(x)$'와 '$0\le x\le a,\ 0\le y\le g(x)$'의 넓이의 비는 n을 충분히 크게 했을 때의 $\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{ka}{n}\right)$와 $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{ka}{n}\right)$의 비와 같음을 믿고 있었다. 카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598~1647)는 이 생각을 '극한'의 개념으로 발전시켜, '모든 세로 좌

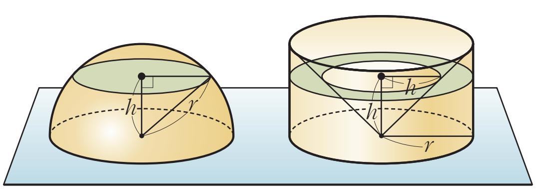
표의 합'이라는 용어를 사용하여 엄밀한 뜻에서 양자의 비가 같음을 밝히고 있다. 주어진 평면도형의 불가분량은 그 도형의 현을 의미하고 그 평면도형은 그와 같이 평행하게 무한히 많은 불가분량의 집합으로 이루어진 것으로 간주할 수 있다. 만약 어떤 평면도형의 평행한 불가분량들 각각을 자체의 축을 따라 불가분량의 끝점들은 연속적인 경계를 유지하며 밀어 움직이면 그리고 원래의 도형과 새로 만들어진 도형이 같은 불가분량으로 이루어진다면 서로 같다고 카발리에리는 주장했다. 이러한 주장은 입체도형에 대해서도 마찬가지이다.


카발리에리

4. 카발리에리의 원리의 활용

만약 두 개의 평면도형이 한 쌍의 평행선 사이에 끼어 있고, 만약 그 평행선과 평행한 임의의 선으로 그 두 평면도형을 잘랐을 때 생기는 두 선분의 길이가 항상 일정한 비를 가지면, 두 평면도형의 넓이도 또한 그 비를 갖는다.

만약 두 개의 입체도형이 한 쌍의 평행면 사이에 끼어 있고, 그 평행면들과 평행인 임의의 면으로 그 두 입체도형을 잘랐을 때 생기는 두 단면의 넓이가 항상 일정한 비를 가지면, 두 입체도형의 부피도 또한 그 비를 갖는다.



반구와 원뿔을 제거한 직원기둥은 같은 평면 위에 놓여 있다. 이 두 입체도형을 밑면에서 h의 높이에 있는 밑면과 평행인 평면으로 자른 단면은 각각 원판과 원환이 된다. 초등 기하학에 의해서 이 두 단면의 넓이는 $\pi(r^2-h^2)$으로 서로 같다.

카발리에리의 둘째 원리에 의해서 두 입체도형의 부피는 같아야 한다. 따라서 구의 부피 V에 대한 공식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= 2\{(\text{직원기둥의 부피})-(\text{원뿔의 부피})\} \\ &= 2\left(\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

5. 적분법의 탄생

이 카발리에리의 '불가분의 기하학'은 매우 획기적인 것이었지만, 그 불가분법의 약점을 발견하고 그 개념을 근본적으로 개조한 학자는 토리첼리(Torricelli, E. ; 1608～1647)와 파스칼(Pascal, B. ; 1623～1662)이며, 이 두 학자에 의하여 구분적분법의 단서가 열렸다고도 생각할 수 있다. 그 어느 쪽도 적분은 직접 구적과 관련된 뜻을 가지는 것이었으나, 현대적 표현으로

$$\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx,$$

$$\int cf\,dx = c\int f\,dx$$

등의 일반 법칙에 생각이 미치는 등 점차 문제의 추상화가 진행되었다.

그 후 뉴턴, 라이프니츠에 이르기까지 구체적인 문제의 연구를 통하여 점차 적분의 내용도 풍부해지고, 무한급수를 사용하는 방법, 치환적분법, 부분적분법 등이 사용되기에 이르렀다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅳ. 적분법	쪽수	교과서 150~154쪽
소단원	1. 여러 가지 적분법 01 여러 가지 함수의 부정적분	차시	1/20
학습 목표	함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분을 구할 수 있다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 중단원 도입 글을 읽고, 단원 과제를 발문하여 이번 단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◐ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분을 구할 수 있다.	
전개	탐구 활동 개념 학습	◐ 탐구 활동을 해결하도록 한다. ◐ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분 (1) $n\neq 1$일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (2) $n=-1$일 때, $\int \frac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$ ◐ 문제 1번을 풀게 한다. • 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 여러 가지 함수의 부정적분에 대하여 알아본다.	

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원		Ⅳ. 적분법	쪽수	교과서 154~156쪽
소단원		**1. 여러 가지 적분법** 01 여러 가지 함수의 부정적분	차시	2/20
학습 목표		**여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.**		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◆ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◆ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. ◆ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.		
전개	개념 학습 문제 해결	◆ 학습 내용 설명 **삼각함수의 부정적분** (1) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ (2) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$ (3) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$ (4) $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$ **지수함수의 부정적분** (1) $\int e^x dx=e^x+C$ (2) $\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0$, $a\neq1$) ◆ 문제 2, 3, 4번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		실수배, 합, 차로 표현된 함수의 부정적분의 성질을 상기시킨다.
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◆ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◆ 다음 차시를 예고한다. • 치환적분법에 대하여 알아본다.		

1 여러 가지 적분법

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 치환적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있게 한다.

② 부분적분법을 이해하고 이를 활용할 수 있게 한다.

③ 여러 가지 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 여러 가지 함수의 부정적분	$y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분
	삼각함수의 부정적분
	지수함수의 부정적분
02 치환적분법	치환적분법
	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분
	유리함수의 부정적분
03 부분적분법	부분적분법
04 여러 가지 함수의 정적분	$y=x^n$ (n은 실수), 삼각함수, 지수함수의 정적분
	정적분의 치환적분법
	정적분의 부분적분법
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 152 쪽

1 여러 가지 적분법

소유즈 호의 중력장 탈출 에너지

2008년 4월 8일 이소연 씨는 카자흐스탄 바이코누르 우주 기지에서 소유즈 TMA-12호를 타고 국제 우주 정거장(ISS)과의 도킹에 성공함으로써 대한민국 최초의 우주인이 되었다. 이소연 씨는 국제 우주 정거장에서 9박 10일간 머물면서 18가지 우주 과학 실험 등의 우주 임무를 수행하고 무사히 귀환하였다.

소유즈 호가 국제 우주 정거장으로 진입하는 데 필요한 에너지는 얼마나 될까?

소유즈 호와 같이 질량을 가지는 지구상의 물체는 지구 중력장의 영향을 받는다. 따라서 소유즈 호가 받는 지구 중력장의 세기에 해당하는 에너지가 있어야 지구 중력장을 벗어나 국제 우주 정거장에 진입할 수 있다.

소유즈 호가 받는 지구 중력장의 세기는 지구 중심으로부터의 거리에 따라 변하는데, 지상에서 국제 우주 정거장까지의 중력장의 세기를 적분하면 소유즈 호가 국제 우주 정거장으로 진입하기 위해 필요한 에너지의 양을 알 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 170 쪽

소유즈 호가 국제 우주 정거장으로 진입하기 위해 필요한 에너지는 얼마나 될까?

들어가면서 다양한 함수들에 대한 부정적분을 구할 수 있어야 여러 영역에서 필요한 정적분을 계산할 수 있다. 이 단원에서는 $y=x^n$ (n은 실수), 삼각함수, 지수함수의 부정적분에 대하여 학습하고, 치환적분법과 부분적분법을 학습함으로써 여러 가지 함수의 정적분을 자유롭게 사용하고 활용할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	상	치환적분법을 이용하여 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	중	치환적분법을 이용하여 $f(x)=(ax+b)^n$ 꼴의 정적분을 구할 수 있다.
	하	치환적분법을 이용하여 $f(x)=(ax+b)^n$ 꼴의 부정적분을 구할 수 있다.
2. 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.	상	부분적분법을 이용하여 로그함수나 $x(ax+b)^n$ 꼴의 간단한 함수의 정적분을 구할 수 있다.
	중	부분적분법을 이용하여 간단한 함수의 부정적분을 구할 수 있다.
	하	부분적분법은 곱의 미분법을 이용한 적분법임을 말할 수 있다.
3-1. 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.	상	함수 $y=x^n$ (n은 실수)와 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분과 정적분의 성질을 이용하여 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	중	$y=x^n$ (n은 실수) 꼴의 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	하	$y=x^n$ ($n\neq-1$인 실수) 꼴의 함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.

교과서 153 쪽

01 여러 가지 함수의 부정적분

● 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있다.

다항함수가 아닌 함수의 부정적분은 어떻게 구하는가?

탐구 활동

미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $\frac{1}{x}$을 미분하여 보자.
2. 1의 결과를 이용하여 부정적분 $\int \frac{1}{x^2}dx$를 구하여 보자.

n이 0 또는 양의 정수일 때, 함수 $y=x^n$의 부정적분은

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

이다. 이제 n을 실수까지 확장하여 함수 $y=x^n$의 부정적분을 구하여 보자.

❶ $n\neq -1$일 때, 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 미분법에서

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n\text{이므로}\quad \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

이다.

한편 $n=-1$일 때, 로그함수의 미분법에서

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}\text{이므로}\quad \int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

이다.

● $\int \frac{1}{x}dx$는 $\int \frac{dx}{x}$로 나타내기도 한다.

성취 기준		성취 수준
3-2. 삼각함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.	상	삼각함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	중	$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 정적분을 구할 수 있다.
	하	$y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 부정적분을 구할 수 있다.
3-3. 지수함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.	상	지수함수의 부정적분과 정적분을 구할 수 있다.
	중	$y=e^x$, $y=a^x$ 꼴의 함수의 정적분을 구할 수 있다.
	하	$y=e^x$, $y=a^x$ 꼴의 함수의 부정적분을 구할 수 있다.

01 여러 가지 함수의 부정적분

소단원 지도 목표

① $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

② 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

③ 지수함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. x^n의 부정적분에서 n이 자연수, 정수는 물론 유리수일 때도 성립함을 다양한 예를 통해 이해하게 한다.
2. 미분의 성질을 이용하여 부정적분의 성질이 성립함을 보이고 이를 활용하여 부정적분을 구할 수 있도록 지도한다.
3. $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$에서 $n\neq -1$임에 주의하도록 한다.
4. 삼각함수의 부정적분은 삼각함수의 미분법의 공식을 이끌어내고 이를 이용하여 다양한 문제를 풀어봄으로써 완전히 익힐 수 있도록 지도한다.
5. 지수함수의 부정적분은 지수함수의 미분법의 공식을 이끌어내고 이를 이용하여 구하도록 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$와의 관계를 이해하고 이를 이용하여 함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분을 확인하기 위한 활동이다.

1. $\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
2. $\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$ (단, C는 적분상수)

본문 해설

❶ $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수)

에서 $n=-1$일 때는 공식이 성립하지 않으므로

$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$를 사용한다.

$\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$에서 $\frac{1}{x}$의 부정적분은

$\ln x+C$가 아니라 $\ln|x|+C$임을 주의한다.

교과서 154 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $y=x^n$ (n은 실수)의 부정적분

(1) $n\neq-1$일 때, $\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(2) $n=-1$일 때, $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$

보기 (1) $\int \frac{1}{x^3}dx=\int x^{-3}dx=\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C=-\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{2x^2}+C$

(2) $\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

문제 1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{1}{x^5}dx$　　(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

(3) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$　　(4) $\int x\sqrt{x}\,dx$

실수배, 합, 차로 표현된 함수의 부정적분은 다음 성질을 이용하여 구한다.

[1] $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

[2] $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

[3] $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

보기 $\int \frac{1+2x}{x^3}dx=\int \frac{1}{x^3}dx+2\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{2}x^{-2}-2x^{-1}+C=-\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}+C$

문제 2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{3x^2-1}{x}dx$　　(2) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx$

1

목표| x^n의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int \frac{1}{x^5}dx=\int x^{-5}dx$

$$=\frac{1}{-5+1}x^{-5+1}+C$$
$$=-\frac{1}{4}x^{-4}+C$$
$$=\mathbf{-\frac{1}{4x^4}+C}$$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$

$$=2x^{\frac{1}{2}}+C=\mathbf{2\sqrt{x}+C}$$

(3) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}+C$

$$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=\mathbf{\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C}$$

(4) $\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C=\mathbf{\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C}$$

2

목표| 부정적분의 기본 성질을 이용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int \frac{3x^2-1}{x}dx=\int 3x\,dx-\int \frac{1}{x}dx$

$$=\mathbf{\frac{3}{2}x^2-\ln|x|+C}$$

(2) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx$

$$=\int \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x}dx$$
$$=\int 1\,dx+2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int \frac{1}{x}dx$$
$$=\mathbf{x+4\sqrt{x}+\ln|x|+C}$$

지/도/자/료　미분법의 공식과 적분

실수배, 합, 차의 부정적분에서 $\int f(x)dx$, $\int g(x)dx$ 등의 식 자체에 적분상수 C가 포함되어 있으므로 별도로 적분상수를 붙일 필요없이 부정적분을 구할 때 마지막에 붙여주면 된다. 그리고 실수배, 합, 차로 표현된 함수의 부정적분은 다음 미분법의 공식과 연관지어 기억하도록 하자.

미분 가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대해

(1) $y=kf(x)$이면 $y'=kf'(x)$ (단, k는 상수)

(2) $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

(3) $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

(4) $y=f(x)g(x)$이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

교과서 155 쪽

삼각함수의 부정적분에 대하여 알아보자.

❶ 삼각함수의 미분법에서

$(\sin x)'=\cos x$이므로 $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

$(\cos x)'=-\sin x$이므로 $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

$(\tan x)'=\sec^2 x$이므로 $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$이므로 $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각함수의 부정적분

(1) $\int \sin x\,dx=-\cos x+C$ (2) $\int \cos x\,dx=\sin x+C$

(3) $\int \sec^2 x\,dx=\tan x+C$ (4) $\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

예제 01 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (2\cos x-\sin x)dx$ (2) $\int \frac{\cos^3 x-2}{\cos^2 x}dx$

풀이 (1) $\int (2\cos x-\sin x)dx=2\int \cos x\,dx-\int \sin x\,dx$

$=2\sin x+\cos x+C$

(2) $\int \frac{\cos^3 x-2}{\cos^2 x}dx=\int (\cos x-2\sec^2 x)dx=\int \cos x\,dx-2\int \sec^2 x\,dx$

$=\sin x-2\tan x+C$

답 (1) $2\sin x+\cos x+C$ (2) $\sin x-2\tan x+C$

문제 3 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (\cos x+2\csc^2 x)dx$ (2) $\int \frac{\sin^3 x+2}{\sin^2 x}dx$

(3) $\int 2\tan^2 x\,dx$ (4) $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$

$\tan^2 x+1=\sec^2 x$

(2) $\int \frac{\sin^3 x+2}{\sin^2 x}dx$

$=\int (\sin x+2\csc^2 x)dx$

$=\int \sin x\,dx+2\int \csc^2 x\,dx$

$=\mathbf{-\cos x-2\cot x+C}$

(3) $\int 2\tan^2 x\,dx$

$=2\int (\sec^2 x-1)dx$

$=\mathbf{2\tan x-2x+C}$

(4) $\int \frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$

$=\int \frac{1-\sin^2 x}{1+\sin x}dx$

$=\int \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}dx$

$=\int (1-\sin x)dx$

$=\mathbf{x+\cos x+C}$

본문 해설

❶ $(\cos x)'=-\sin x$에서 $-(\cos x)'=\sin x$이므로

$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

$(\cot x)'=-\csc^2 x$에서 $-(\cot x)'=\csc^2 x$이므로

$\int \csc^2 x\,dx=-\cot x+C$

3

목표| 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int (\cos x+2\csc^2 x)dx$

$=\int \cos x\,dx+2\int \csc^2 x\,dx$

$=\mathbf{\sin x-2\cot x+C}$

지/도/자/료 삼각함수

1. $\sin x=\frac{b}{c} \Rightarrow \csc x=\frac{c}{b}=\frac{1}{\sin x}$

$\cos x=\frac{a}{c} \Rightarrow \sec x=\frac{c}{a}=\frac{1}{\cos x}$

$\tan x=\frac{b}{a} \Rightarrow \cot x=\frac{a}{b}=\frac{1}{\tan x}$

2. $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\cot x)'=-\csc^2 x$

에서 삼각함수의 부정적분을 이해하게 한다.

4

목표| 공식을 이용하여 지수함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int (e^{x-1}+3^{x+2})dx$

$$=\frac{1}{e}\int e^x dx+3^2\int 3^x dx$$

$$=e^{x-1}+3^2\frac{3^x}{\ln 3}+C$$

$$=\boldsymbol{e^{x-1}+\frac{3^{x+2}}{\ln 3}+C}$$

(2) $\int (2^x+1)^2 dx$

$$=\int (4^x+2^{x+1}+1)dx$$

$$=\int 4^x dx+2\int 2^x dx+\int 1\,dx$$

$$=\boldsymbol{\frac{4^x}{\ln 4}+\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+x+C}$$

(3) $\int \frac{e^{2x}-x^2}{e^x-x}dx$

$$=\int \frac{(e^x+x)(e^x-x)}{e^x-x}dx$$

$$=\int (e^x+x)dx=\boldsymbol{e^x+\frac{1}{2}x^2+C}$$

(4) $\int \frac{9^x-1}{3^x+1}dx$

$$=\int \frac{(3^x-1)(3^x+1)}{3^x+1}dx$$

$$=\int (3^x-1)dx=\boldsymbol{\frac{3^x}{\ln 3}-x+C}$$

지/도/자/료

1. 기본적인 지수함수의 부정적분을 구할 수 있도록 한다. 지수함수의 미분법의 공식을 확실히 이해하도록 하고 미분법의 공식을 이용하여 부정적분의 공식을 구해 보고 이를 이용하여 여러 가지 함수의 부정적분을 구해 보게 한다.

2. 지수함수의 부정적분을 구할 때에는 먼저 지수법칙을 이용하여 주어진 지수함수를 적분하기 쉬운 형태로 변형한 다음 적분한다.

교과서 156 쪽

지수함수의 부정적분에 대하여 알아보자.

지수함수의 미분법에서

$(e^x)'=e^x$이므로 $\int e^x dx=e^x+C$

$(a^x)'=a^x\ln a$ $(a>0,\ a\neq 1)$이므로 $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

지수함수의 부정적분

(1) $\int e^x dx=e^x+C$

(2) $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$ (단, $a>0,\ a\neq 1$)

예제 02 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int e^{x-2}dx$ (2) $\int 2^{x-1}dx$

풀이 (1) $\int e^{x-2}dx=e^{-2}\int e^x dx$

$=e^{-2}e^x+C=e^{x-2}+C$

(2) $\int 2^{x-1}dx=\frac{1}{2}\int 2^x dx$

$=\frac{2^x}{2\ln 2}+C=\frac{2^{x-1}}{\ln 2}+C$

답 (1) $e^{x-2}+C$ (2) $\frac{2^{x-1}}{\ln 2}+C$

문제 4 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (e^{x-1}+3^{x+2})dx$ (2) $\int (2^x+1)^2 dx$

(3) $\int \frac{e^{2x}-x^2}{e^x-x}dx$ (4) $\int \frac{9^x-1}{3^x+1}dx$

읽/기/자/료 수학자 배로

런던에서 태어난 배로(Barrow, I. ; 1630~1677)는 케임브리지 대학교에서 교육을 마쳤으며 파리, 이탈리아, 콘스탄티노플에서 고전을 연구하였다. 1659년에 귀국하여 사제가 되었으며, 1660년 케임브리지 대학교의 그리스 어 교수로 임명되었다. 그는 수학, 물리, 천문학, 신학에 걸쳐 두루 인정을 받은 학구적인 사람이다. 1663년 수학의 루커스 교수직이 신설되자 초대 교수가 되었으며 여기서 광학과 기하학의 강의로 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)에게 영향을 주었고, 1669년 제자 뉴턴에게 교수직을 물려주었다.

배로의 가장 중요한 수학적 업적은 그의 저서 '기하학 강의'인데, 이 책에서 현대 미분 과정과 매우 비슷한 접근 방법이 나온다. 특히 페르마(Fermat, P. ; 1601~1665)의 접선법을 발전시키고 미분과 적분이 서로 역연산 관계에 있다는 것을 증명하여 미적분학의 기초를 닦은 것으로 유명하다. 배로는 일반적으로 미분법과 적분법이 역연산 관계라는 사실을 최초로 깨달은 사람이라고 일컬어진다.

교과서 157 쪽

02 치환적분법

● 치환적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

치환적분법이란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $\sin(3x+2)$를 미분하여 보자.
2. 1의 결과를 이용하여 부정적분 $\int\cos(3x+2)dx$를 구하여 보자.

함수 $f(x)$의 부정적분 $\int f(x)dx$를 구하고자 할 때, $F'(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$를 쉽게 구할 수 없는 경우가 많다. 예를 들어 위의 부정적분

$$\int\cos(3x+2)dx$$

의 경우 지금까지 배운 공식만으로는

$$F'(x)=\cos(3x+2)$$

인 함수 $F(x)$를 쉽게 구할 수 없다.

$\int\cos(3x+2)dx$와 같이 $F'(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$를 쉽게 구할 수 없는 경우에는 변수 x를 바꾸어 계산하면 편리하다.

일반적으로 부정적분

$$F(x)=\int f(x)dx$$

에서 x를 다른 변수 t의 미분가능한 함수 $x=g(t)$로 놓으면 $F(x)=F(g(t))$가 된다.

새로 나온 용어와 기호

• 치환적분법(置換積分法, integration by substitution)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 함수 $F(x)$와 그 도함수 $f(x)$와의 관계를 이해하고 이를 이용하여 치환적분법의 원리를 발견하기 위한 활동이다.

1. $\{\sin(3x+2)\}'$

$=\{\cos(3x+2)\}(3x+2)'$

$=\mathbf{3\cos(3x+2)}$

2. $\int 3\cos(3x+2)dx$

$=\sin(3x+2)+C'$ (C'은 적분상수)

이므로

$\int\cos(3x+2)dx$

$=\mathbf{\frac{1}{3}\sin(3x+2)+C}$

$\left(C=\frac{C'}{3}\text{은 적분상수}\right)$

02 치환적분법

소단원 지도 목표

① 치환적분을 이용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

② $\frac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

③ 분수함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 치환적분법은 적분에서 대단히 유용한 도구이지만 실제로 어떤 식을 어떻게 치환해야 하는가는 많은 연습을 통하여 지도해야 한다.

2. $x=g(t)$로 치환하여 적분한 결과를 반드시 본래의 변수 x로 치환하도록 지도한다.

3. 간단한 함수의 치환을 연습하여 치환적분법을 이해하게 한다.

지/도/자/료 미분법의 공식과 적분

다음과 같이 간단한 함수의 치환을 연습하여 치환적분법을 익히도록 한다.

① $\int(ax+b)^n dx$에서 $ax+b=t$로 치환하여 부정적분을 구할 수 있게 지도한다.

② $\int\sin(ax+b)dx$ 또는 $\int\cos(ax+b)dx$에서 $ax+b=t$로 치환하여 부정적분을 구할 수 있게 지도한다.

③ $\int e^{ax+b}dx$에서 $ax+b=t$로 치환하여 부정적분을 구할 수 있게 지도한다.

①~③을 기본으로 하여 여러 가지 함수에 대해 치환적분법을 사용하여 적분을 할 수 있도록 다양한 문제를 연습시킨다.

본문 해설

❶ 치환적분법은 합성함수의 미분법, 즉 미분가능한 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)g'(x)=f'(g(x))g'(x)$$
의 역연산이므로 위의 식의 양변을 적분하여
$$y=\int f'(g(x))g'(x)dx$$
와 같은 식을 얻을 수 있음을 설명한 것이다.

❷ 다항함수, 사인함수, 지수함수 등 여러 가지 함수에 대해 치환적분법을 이용할 수 있는데
$t=(x$에 대한 식), $x=(t$에 대한 식)에서
x를 t에 대해 미분한
$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(t$에 대한 식)
을 정리한 후 주어진 x에 대한 부정적분을 t에 대한 부정적분으로 바꾸어 문제를 푸는 것이 일반적이다.

교과서 158 쪽

미분가능한 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$에 대하여
$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$
$=f'(u)g'(x)$
$=f'(g(x))g'(x)$

❶ $F(x)$를 t에 대하여 미분하면 합성함수의 미분법에 의하여
$$\frac{d}{dt}F(x)=\frac{d}{dx}F(x)\cdot\frac{dx}{dt}$$
$$=f(x)g'(t)=f(g(t))g'(t)$$
이므로 양변을 t에 대하여 적분하면
$$F(x)=\int f(g(t))g'(t)dt$$
이다. 따라서 다음이 성립한다.
$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$
이와 같이 $x=g(t)$로 놓아 변수 x를 다른 변수 t의 함수로 치환하여 적분하는 방법을 **치환적분법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

치환적분법
미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면
$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$

예제 01 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(4x+3)^3dx$ (2) $\int\frac{1}{(2x-1)^2}dx$

❷ **풀이** (1) $4x+3=t$로 놓으면 $x=\frac{t-3}{4}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}$이므로
$$\int(4x+3)^3dx=\int t^3\cdot\frac{1}{4}dt=\frac{1}{4}\int t^3\,dt$$
$$=\frac{1}{16}t^4+C=\frac{1}{16}(4x+3)^4+C$$
(2) $2x-1=t$로 놓으면 $x=\frac{t+1}{2}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$이므로
$$\int\frac{1}{(2x-1)^2}dx=\int\frac{1}{t^2}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}dt$$
$$=-\frac{1}{2t}+C=-\frac{1}{2(2x-1)}+C$$

답 (1) $\frac{1}{16}(4x+3)^4+C$ (2) $-\frac{1}{2(2x-1)}+C$

읽/기/자/료 악기(기타)의 생산가 구하기

부정적분을 활용하면 실생활의 여러 가지 문제를 쉽게 해결할 수 있다.
이를테면 다음과 같이 기타의 생산가를 구할 수 있다.
어떤 악기 회사에서 전문가용 기타를 한 달 동안 x대 생산할 때, 고정비용이 4000(천 원)이고, 한계비용 $f'(x)$가 다음과 같다고 한다.
$f'(x)=0.002x+100$(천 원)
그러므로 이 회사에서 한 달 동안 x대의 기타를 생산할 때, 전체 생산비용 $f(x)$는 다음과 같다.
$$f(x)=\int(0.002x+100)dx$$
$$=0.001x^2+100x+C\text{(천 원)}$$
그런데 고정비용이 4000(천 원), 즉
$f(0)=4000$(천 원)이므로 $C=4000$이다.
따라서 전체 생산비용 $f(x)$는 다음과 같다.
$f(x)=0.001x^2+100x+4000$(천 원)

한편 x의 여러 가지 값에 대하여 전체 생산비용 $f(x)$와 한 대당 생산가 $\frac{1}{x}f(x)$를 알아보면 다음 표와 같다.

x(대)	1	10	100	1000
$f(x)$(천 원)	4100.001	5000.1	14010	105000
$\frac{1}{x}f(x)$(천 원)	4100.001	500.01	140.1	105

기/초/력 향상 문제

다음 부정적분을 구하여라.

1 $\int(2x+1)^3dx$

2 $\int\frac{1}{(2x-3)^2}dx$

답 **1** $\frac{1}{8}(2x+1)^4+C$ **2** $-\frac{1}{2(2x-3)}+C$

교과서 159 쪽

문제 1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(3x-5)^4dx$ (2) $\int\sin(3x-2)dx$

예제 02 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x(x^2-1)^4dx$ (2) $\int\cos^3 x\sin x\,dx$

$t=g(x)$로 놓으면
$\int f(g(x))g'(x)dx$
$=\int f(t)dt$

풀이 (1) $x^2-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이므로

$$\int x(x^2-1)^4dx=\frac{1}{2}\int(x^2-1)^4 2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int(x^2-1)^4(x^2-1)'dx$$
$$=\frac{1}{2}\int t^4dt=\frac{1}{10}t^5+C$$
$$=\frac{1}{10}(x^2-1)^5+C$$

(2) $\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$이므로

$$\int\cos^3 x\sin x\,dx=\int\cos^3 x(-\cos x)'dx$$
$$=-\int t^3dt=-\frac{1}{4}t^4+C$$
$$=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$$

답 (1) $\frac{1}{10}(x^2-1)^5+C$ (2) $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

문제 2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ (2) $\int xe^{x^2}dx$

발전 **문제 3** 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int\sin^3 x\,dx$ (2) $\int(2x-1)\sqrt{2x+1}\,dx$

1

목표| 일차식을 치환하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $3x-5=t$로 놓으면 $x=\frac{t+5}{3}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$이므로

$$\int(3x-5)^4dx=\int t^4\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{1}{3}\int t^4dt=\frac{1}{15}t^5+C$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{15}(3x-5)^5+C}$$

(2) $3x-2=t$로 놓으면 $x=\frac{t+2}{3}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{3}$이므로

$$\int\sin(3x-2)dx=\int\sin t\cdot\frac{1}{3}dt$$
$$=\frac{1}{3}\int\sin t\,dt$$
$$=-\frac{1}{3}\cos t+C$$
$$=\boldsymbol{-\frac{1}{3}\cos(3x-2)+C}$$

2

목표| 치환하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2+1=t$로 놓으면

$2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2+1)'}{\sqrt{x^2+1}}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt$$
$$=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{x^2+1}+C}$$

(2) $x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx=\frac{1}{2}\int e^t dt$$
$$=\frac{1}{2}e^t+C=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{x^2}+C}$$

3

목표| 치환하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$

$$\int\sin^3 x\,dx=\int\sin^2 x\sin x\,dx$$
$$=-\int(1-\cos^2 x)(-\sin x)dx$$
$$=-\int(1-t^2)dt=\frac{t^3}{3}-t+C$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C}$$

(2) $\sqrt{2x+1}=t$로 놓으면 $x=\frac{t^2-1}{2}$이므로 $\frac{dx}{dt}=t$

$$\int(2x-1)\sqrt{2x+1}\,dx$$
$$=\int(t^2-2)\cdot t\cdot t\,dt$$
$$=\int(t^4-2t^2)dt$$
$$=\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{15}t^3(3t^2-10)+C$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{15}(12x^2-8x-7)\sqrt{2x+1}+C}$$

4

목표| 치환적분법을 활용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x^3-2x+3)'=3x^2-2$이므로

$$\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+3}dx$$
$$=\int \frac{(x^3-2x+3)'}{x^3-2x+3}dx$$
$$=\mathbf{\ln|x^3-2x+3|+C}$$

(2) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$이므로

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx$$
$$=\int \frac{(\ln x)'}{\ln x}dx$$
$$=\mathbf{\ln|\ln x|+C}$$

교과서 160 쪽

치환적분법을 이용하여 부정적분 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$를 구하는 방법을 알아보자.

$f(x)=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=f'(x)$이므로

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)dx=\int \frac{1}{t}dt$$
$$=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

$\frac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$$

예제 03 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{2x}{x^2-1}dx$ (2) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

풀이 (1) $(x^2-1)'=2x$이므로

$$\int \frac{2x}{x^2-1}dx=\int \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}dx=\ln|x^2-1|+C$$

(2) $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=\int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx=\ln(e^x+e^{-x})+C$$

답 (1) $\ln|x^2-1|+C$ (2) $\ln(e^x+e^{-x})+C$

문제 4 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{3x^2-2}{x^3-2x+3}dx$ (2) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

문제 5 다음 부정적분을 구하여라.

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

(1) $\int \tan x\,dx$ (2) $\int \cot x\,dx$

5

목표| 치환적분법을 활용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int \tan x\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

$(\cos x)'=-\sin x$이므로

$$\int \frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx$$
$$=-\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$$
$$=\mathbf{-\ln|\cos x|+C}$$

(2) $\int \cot x\,dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$(\sin x)'=\cos x$이므로

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$$
$$=\mathbf{\ln|\sin x|+C}$$

본문 해설

❶ 분수함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$를 적절히 변형하면 부정적분을 쉽게 구할 수 있다.

(1) $f'(x)=g(x)$일 때

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$를 이용하여 부정적분을 구한다. 예를 들어

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\ln|x^2+2x+2|+C$$

(2) $f'(x)\neq g(x)$일 때

주어진 분수함수를 몫과 나머지의 꼴로 나타내거나 $\frac{1}{ax+b}$ 꼴의 합으로 변형하여 부정적분을 구한다. 예를 들어 $\int \frac{x}{(x-3)^2}dx$를 구하여 보자.

$\frac{x}{(x-3)^2}=\frac{1}{x-3}+\frac{3}{(x-3)^2}$이므로

① $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ 의 꼴이 아닌 유리함수의 부정적분을 구할 때에는 먼저 주어진 유리함수를 간단한 유리함수의 합 또는 차의 꼴로 변형한 다음 적분한다.

$\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$ (단, $AB\neq0$, $A\neq B$)

보기 $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$ 이므로

$\displaystyle\int\frac{1}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln|x|-\ln|x+1|+C=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

문제 6 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int\frac{3}{x(x+3)}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{2}{x^2-1}dx$

예제 04 부정적분 $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2-x-2}dx$를 구하여라.

풀이 $\dfrac{x-1}{x^2-x-2}=\dfrac{m}{x-2}+\dfrac{n}{x+1}$ 이라고 하면

$\dfrac{x-1}{x^2-x-2}=\dfrac{(m+n)x+(m-2n)}{x^2-x-2}$

계수를 비교하면 $m+n=1$, $m-2n=-1$이므로 $m=\dfrac{1}{3}$, $n=\dfrac{2}{3}$

따라서 $\dfrac{x-1}{x^2-x-2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}$ 이므로

$\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2-x-2}dx=\int\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\dfrac{1}{3}\ln|x-2|+\dfrac{2}{3}\ln|x+1|+C$

답 $\dfrac{1}{3}\ln|x-2|+\dfrac{2}{3}\ln|x+1|+C$

문제 7 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int\frac{x+2}{(x+3)(x-1)}dx$ (2) $\displaystyle\int\frac{5x-7}{x^2-3x+2}dx$

$\displaystyle\int\frac{x}{(x-3)^2}dx$

$\displaystyle=\int\frac{1}{x-3}dx+\int\frac{3}{(x-3)^2}dx$

$=\ln|x-3|+3\cdot\dfrac{(x-3)^{-2+1}}{-2+1}+C$

$=\ln|x-3|-\dfrac{3}{x-3}+C$

6

목표| 분수함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{3}{x(x+3)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}$ 이므로

$\displaystyle\int\frac{1}{x(x+3)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$=\ln|x|-\ln|x+3|+C$

$=\mathbf{\ln\left|\dfrac{x}{x+3}\right|+C}$

(2) $\dfrac{2}{x^2-1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}$ 이므로

$\displaystyle\int\frac{2}{x^2-1}dx$

$\displaystyle=\int\frac{2}{(x-1)(x+1)}dx$

$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\ln|x-1|-\ln|x+1|+C$

$=\mathbf{\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C}$

7

목표| 분수함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{x+2}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{m}{x+3}+\dfrac{n}{x-1}$ 으로 놓고 양변에 $|(x+3)(x-1)|$을 곱하여 정리하면

$x+2=(m+n)x+(-m+3n)$

$m+n=1$, $-m+3n=2$를 연립하여 풀면

$m=\dfrac{1}{4}$, $n=\dfrac{3}{4}$

따라서 $\dfrac{x+2}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x-1}\right)$이므로

$\displaystyle\int\frac{x+2}{(x+3)(x-1)}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x-1}\right)dx$

$=\mathbf{\dfrac{1}{4}\ln|x+3|+\dfrac{3}{4}\ln|x-1|+C}$

(2) $\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}=\dfrac{m}{x-1}+\dfrac{n}{x-2}$ 이라고 하면

$\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}=\dfrac{(m+n)x-2m-n}{x^2-3x+2}$

$m+n=5$, $-2m-n=-7$을 연립하여 풀면

$m=2$, $n=3$

따라서 $\dfrac{5x-7}{x^2-3x+2}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}$ 이므로

$\displaystyle\int\frac{5x-7}{x^2-3x+2}=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx$

$=2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C$

$=\mathbf{\ln|(x-1)^2(x-2)^3|+C}$

03 부분적분법

소단원 지도 목표

① 부분적분법을 이해하게 한다.
② 부분적분법을 이용하여 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 부분적분법은 적분에서 대단히 유용한 도구이므로 많은 연습을 통해 숙달하도록 해야 한다.

2. 두 함수의 곱에서만 부분적분의 공식이 적용되는 것이 아니라 $\int \ln x\, dx$와 같이 단항식에서도 적용할 수 있음을 주지시킨다. 이 경우 $\ln x = 1 \times \ln x$로 본다는 점도 알게 한다.

3. 부분적분법을 이용할 때 미분한 결과가 간단히 되는 것을 $f(x)$로 적분하기 쉬운 것을 $g'(x)$로 택하면 효과적임을 주지시킨다.

교과서 162 쪽

03 부분적분법

● 부분적분법을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

부분적분법이란 무엇인가?

탐구 활동 등식 $(x\sin x)'=(x)'\sin x+x(\sin x)'$을 이용하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. □ 안에 알맞은 식을 써넣어 보자.

$$x(\sin x)'=\boxed{}-(x)'\sin x$$

2. **1**을 이용하여 □ 안에 알맞은 식을 써넣어 보자.

$$\int x(\sin x)'dx=\boxed{}-\int (x)'\sin x\,dx$$

3. $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$라고 할 때, **2**의 등식을 $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$를 사용하여 나타내어 보자.

함수의 곱의 미분법을 이용하면 함수의 곱의 부정적분을 구할 수 있다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 곱 $f(x)g(x)$를 미분하면

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 이 식의 양변을 적분하면

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int \{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx+\int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

이와 같이 적분하는 방법을 **부분적분법**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **부분적분법**
> 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때,
> $$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

새로 나온 용어와 기호

• 부분적분법(部分積分法, integration by parts)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 곱의 미분법을 이용해서 두 함수의 곱의 부정적분을 구하는 과정을 통해 부분적분의 필요성을 알게 하는 활동이다.

1. $x(\sin x)'=\boxed{\mathbf{(x\sin x)'}}-(x)'\sin x$

2. $\int x(\sin x)'dx=\boxed{\mathbf{x\sin x}}-\int (x')\sin x\,dx$

3. $\int \boldsymbol{f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx}$

지/도/자/료 부분적분법의 적용

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$$

를 적용하기 위해서는 피적분함수에서 무엇을 $f(x)$, $g'(x)$로 놓느냐를 판단하는 일이 중요하다. 이것에 따라 우변의 풀이가 간단해지기도 하고 복잡해지기도 하기 때문이다.

(1) 다항함수와 삼각함수의 곱일 때, 다항함수를 $f(x)$, 삼각함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.
(2) 다항함수와 지수함수의 곱일 때, 다항함수를 $f(x)$, 지수함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.
(3) 다항함수와 로그함수의 곱일 때, 로그함수를 $f(x)$, 다항함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.
(4) 삼각함수와 지수함수의 곱일 때, 삼각함수를 $f(x)$, 지수함수를 $g'(x)$로 놓고 부분적분법을 적용한다.

$f(x) \longleftrightarrow g'(x)$

로그함수　다항함수　삼각함수　지수함수

교과서 163 쪽

예제 01 부정적분 $\int xe^x dx$를 구하여라.

풀이 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1\cdot e^x dx = xe^x - e^x + C$$

답 $xe^x - e^x + C$

문제 1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x\cos x\,dx$ (2) $\int xe^{3x}dx$

예제 02 부정적분 $\int \ln x\,dx$를 구하여라.

풀이 $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

답 $x\ln x - x + C$

문제 2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \ln 3x\,dx$ (2) $\int x\ln x\,dx$

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

부정적분 $\int e^x \sin x\,dx$를 구하는 방법에 대하여 토의하여 보자.

1

목표| 부분적분법을 이용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=x$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$이므로

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int 1\cdot \sin x\,dx$$
$$= \mathbf{x\sin x + \cos x + C}$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{3x}$으로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=\frac{e^{3x}}{3}$이므로

$$\int xe^{3x}dx = x\cdot\frac{e^{3x}}{3} - \int 1\cdot\frac{e^{3x}}{3}dx$$
$$= \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(3x)'}e^{3x} + C$$
$$= \mathbf{\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C}$$

2

목표| 부분적분법을 이용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=\ln 3x$, $g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int \ln 3x\,dx$$
$$= x\ln 3x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$= x\ln 3x - \int dx$$
$$= \mathbf{x\ln 3x - x + C}$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\int x\ln x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx$$
$$= \mathbf{\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C}$$

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 부분적분법을 두 번 적용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| 부분적분법을 적용하여

$f(x)=\sin x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=\cos x$, $g(x)=e^x$

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

부분적분법을 한 번 더 적용하여

$u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x\cos x + \int e^x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ②$$

②를 ①에 대입하면

$$\int e^x\sin x\,dx = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,dx$$

따라서 $\int e^x\sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$

교과서 164 쪽

04 여러 가지 함수의 정적분

● 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.

여러 가지 함수의 정적분은 어떻게 구하는가?

생각 열기

탐구 활동 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(t)$가 $\int_1^x f(t)dt=x^2-3x+a$를 만족시킬 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 함수 $f(x)$와 상수 a의 값을 각각 구하여 보자.
2. 1의 결과를 구하기 위하여 사용한 성질을 말하여 보자.

정적분과 미분의 관계를 이용하면 미적분의 기본 정리가 성립함을 알 수 있다.

즉, 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

이다. 또한

$$a=b\text{일 때}\quad \int_a^a f(x)dx=0$$

$$a>b\text{일 때}\quad \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

로 정의한다.

보기 (1) $\int_0^1 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^1=e^1-e^0=e-1$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$

문제 1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ (2) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$

(3) $\int_0^1 3^x dx$ (4) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin x\,dx$

04 여러 가지 함수의 정적분

소단원 지도 목표

① 정적분의 계산 성질을 알고 이를 이용하여 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.
② 급수의 합을 정적분을 이용하여 구할 수 있게 한다.
③ 정적분에서의 치환적분법의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 정적분을 계산할 수 있게 한다.
④ 그래프가 y축 또는 원점에 대하여 대칭인 함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.
⑤ 정적분에서의 부분적분법의 뜻을 이해하고 이를 이용하여 정적분을 계산할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 정적분과 미분의 관계를 이용하여 미적분의 기본 정리가 성립함을 다시 상기시킨다.

2. 적분의 성질을 이해하게 하여 정적분을 계산하는 능력을 갖게 하도록 한다. 이때, 부정적분의 계산의 성질로부터 정적분의 계산 성질을 유도할 수 있는 방법을 생각해 보도록 지도한다.

3. 절댓값을 포함하는 함수의 정적분의 계산은 그래프를 그려서 각 구간별로 피적분 함수를 구하여 적분하게 한다.

4. 급수의 합을 구할 때 모든 급수의 합을 정적분을 이용하여 구할 수 있는 것이 아님을 알도록 한다.

5. 정적분의 치환적분법에서는 정적분의 위끝과 아래끝을 함께 바꾸어야 함을 강조한다.

6. 부분적분법은 두 함수의 곱의 정적분을 구할 때 이용됨을 이해하게 하고 두 함수 중 $f(x)$와 $g'(x)$를 정할 때 유의하게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 정적분과 미분의 관계를 이용하여 미적분의 기본 정리가 성립함을 이해하기 위한 활동이다.

1. $f(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x f(t)dt=\mathbf{2x-3}$

$\int_1^x f(t)dt=x^2-3x+a$의 x에 1을 대입하면

$0=1-3+a$, $\mathbf{a=2}$

2. 미적분의 기본 정리, 즉 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$,

$\int_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0$

1

목표| 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있다.

풀이| (1) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_1^2=\ln 2-0=\mathbf{\ln 2}$

(2) $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\Big[x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{2}{3}(1-0)=\mathbf{\frac{2}{3}}$

(3) $\int_0^1 3^x dx=\Big[\frac{3^x}{\ln 3}\Big]_0^1=\frac{3-1}{\ln 3}=\mathbf{\frac{2}{\ln 3}}$

(4) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

미적분 I 에서와 같이 부정적분의 성질과 미적분의 기본 정리를 이용하면 함수의 실수배, 합, 차의 정적분을 구할 수 있다.

❶ 즉, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때

[1] $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

[2] $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

[3] $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

가 성립한다.

한편 함수 $f(x)$가 임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때, 분할된 구간에서의 정적분은 다음과 같이 구할 수 있다.

[4] $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

이를 이용하여 여러 가지 함수의 정적분을 구하여 보자.

예제 01 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$　　(2) $\int_{-\pi}^0 \sin x\,dx-\int_\pi^0 \sin x\,dx$

풀이 (1) $\int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx+\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$

$=\int_0^1 \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx=\int_0^1 \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1}dx$

$=\int_0^1 \{(e^2)^x-e^x+1\}dx=\left[\frac{e^{2x}}{\ln e^2}-e^x+x\right]_0^1=\frac{1}{2}e^2-e+\frac{3}{2}$

(2) $\int_{-\pi}^0 \sin x\,dx-\int_\pi^0 \sin x\,dx$

$=\int_{-\pi}^0 \sin x\,dx+\int_0^\pi \sin x\,dx=\int_{-\pi}^\pi \sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{-\pi}^\pi=0$

답 (1) $\frac{1}{2}e^2-e+\frac{3}{2}$　(2) 0

문제 2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_\pi^0 \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^\pi \frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$

(2) $\int_0^4 (2x+e^x)dx-\int_2^4 (2y+e^y)dy+\int_2^5 (2z+e^z)dz$

본문 해설

❶ 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$와 $G(x)$라고 하면

[2] $\int \{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C$

$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx$

$=\Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b$

$=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}$

$=\{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}$

$=\Big[F(x)\Big]_a^b+\Big[G(x)\Big]_a^b$

$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

[3] $\int \{f(x)-g(x)\}dx$

$=F(x)-G(x)+C$

$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

$=\Big[F(x)-G(x)\Big]_a^b$

$=\{F(b)-G(b)\}-\{F(a)-G(a)\}$

$=\{F(b)-F(a)\}-\{G(b)-G(a)\}$

$=\Big[F(x)\Big]_a^b-\Big[G(x)\Big]_a^b$

$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

2

목표 | 분할된 구간 위에서 정적분의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\int_\pi^0 \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^\pi \frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_0^\pi \frac{-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^\pi \frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_0^\pi \frac{-(\sin^2 x-\cos^2 x)}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_0^\pi \frac{-(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int_0^\pi (\cos x-\sin x)dx$

$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^\pi=-1-1=\mathbf{-2}$

(2) $\int_0^4 (2x+e^x)dx-\int_2^4 (2y+e^y)dy+\int_2^5 (2z+e^z)dz$

$=\int_0^4 (2x+e^x)dx-\int_2^4 (2x+e^x)dx+\int_2^5 (2x+e^x)dx$

$=\int_0^4 (2x+e^x)dx+\left\{\int_2^5 (2x+e^x)dx-\int_2^4 (2x+e^x)dx\right\}$

$=\int_0^4 (2x+e^x)dx+\int_4^5 (2x+e^x)dx$

$=\int_0^5 (2x+e^x)dx$

$=\Big[x^2+e^x\Big]_0^5=(25+e^5)-1=\mathbf{24+e^5}$

3

목표| 절댓값이 포함된 함수의 정적분의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$

$\displaystyle=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin x)dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$

$\displaystyle=\Big[\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\Big[-\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$=(1-0)+\{0-(-1)\}=\mathbf{2}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^{0}(1-e^x)dx+\int_{0}^{1}(e^x-1)dx$

$\displaystyle=\Big[x-e^x\Big]_{-1}^{0}+\Big[e^x-x\Big]_{0}^{1}$

$=\{-1-(-1-e^{-1})\}+\{(e-1)-1\}$

$\displaystyle=\boldsymbol{e+\frac{1}{e}-2}$

4

목표| 급수의 합을 정적분을 이용하여 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$이라고 하면

$\displaystyle\varDelta x=\frac{1-0}{n}=\frac{1}{n}$,

$\displaystyle x_k=a+k\varDelta x=0+k\cdot\frac{1}{n}=\frac{k}{n}$

이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^1=\boldsymbol{e-1}$

(2) $f(x)=\sin x$, $a=0$, $b=\pi$라고 하면

$\displaystyle\varDelta x=\frac{0-\pi}{n}$, $\displaystyle x_k=a+k\varDelta x=0+k\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{k\pi}{n}$

이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=-(-1)-(-1)=\mathbf{2}$

교과서 166 쪽

예제 02 정적분 $\displaystyle\int_0^{\pi}|\cos x|dx$를 구하여라.

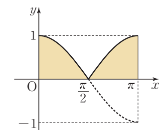
풀이 $\displaystyle 0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때, $|\cos x|=\cos x$이고

$\displaystyle\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$일 때, $|\cos x|=-\cos x$이므로

$\displaystyle\int_0^{\pi}|\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\,dx$

$\displaystyle=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=1+1=2$



답 2

문제 3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1}|e^x-1|dx$

예제 03 정적분을 이용하여 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$을 구하여라.

풀이 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

이때 $f(x)=\sqrt{x}$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$\displaystyle\varDelta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$, $\displaystyle x_k=a+k\varDelta x=\frac{k}{n}$

따라서 정적분의 정의에 의하여

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}$

답 $\dfrac{2}{3}$

문제 4 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}e^{\frac{k}{n}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

지/도/자/료

1. 정적분과 미분의 관계

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt=f(x+a)-f(x)$

(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$

2. 정적분과 극한의 관계

(1) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^{x+a} f(t)dt=f(a)$

3. 정적분과 급수

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac{k}{n}\Big)\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac{a}{n}k\Big)\cdot\frac{a}{n}=\int_0^a f(x)dx$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\Big(a+\frac{b}{n}k\Big)\cdot\frac{b}{n}$

$\displaystyle=\int_a^{a+b}f(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^b f(a+x)dx$

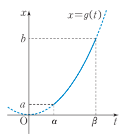
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\Big(a+\frac{b-a}{n}k\Big)\cdot\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)dx$

정적분에서 치환적분법을 어떻게 이용하는가?

부정적분의 치환적분법을 이용하여 정적분을 구하는 방법을 알아보자.

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \quad \cdots\cdots ①$$



t	$\alpha \to \beta$
x	$a \to b$

여기서 x를 다른 변수 t의 미분가능한 함수 $x=g(t)$로 놓으면 치환적분법에 의하여 다음이 성립한다.

$$F(x)=F(g(t))=\int f(g(t))g'(t)dt$$

이때 $x=g(t)$에서 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$라고 하면 다음을 얻는다.

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt=\Big[F(g(t))\Big]_\alpha^\beta$$
$$=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=F(b)-F(a) \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②로부터 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 치환적분법

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

보기 (1) $\int_0^1 2x(x^2+1)^3dx$에서 $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로 $\int_0^1 2x(x^2+1)^3dx=\int_1^2 t^3dt=\Big[\frac{1}{4}t^4\Big]_1^2=\frac{15}{4}$

(2) $\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx$에서 $x+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고, $x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로 $\int_0^1\sqrt{x+1}\,dx=\int_1^2\sqrt{t}\,dt=\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$

문제 5 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^1(3x-2)^5dx$ (2) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}\,dx$

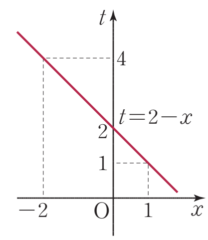
(3) $\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx$ (4) $\int_{-2}^1\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$

(3) $x^2+1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=5$이므로

$$\int_0^2\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_1^5\frac{1}{t}dt$$
$$=\Big[\ln|t|\Big]_1^5=\mathbf{\ln 5}$$

(4) $2-x=t$로 놓으면



$$\frac{dt}{dx}=-1$$

$x=-2$일 때 $t=4$

$x=1$일 때 $t=1$

이므로

$$\int_{-2}^1\frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$$
$$=\int_4^1\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot(-1)dt$$
$$=\int_1^4 t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=\Big[2t^{\frac{1}{2}}\Big]_1^4$$
$$=4-2=\mathbf{2}$$

5

목표 | 치환적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $3x-2=t$로 놓으면

$\frac{dt}{dx}=3$이고

$x=0$일 때 $t=-2$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^1(3x-2)^5dx=\int_{-2}^1 t^5\cdot\frac{1}{3}dt=\int_{-2}^1\frac{1}{3}t^5dt$$
$$=\frac{1}{18}\Big[t^6\Big]_{-2}^1=\mathbf{-\frac{7}{2}}$$

(2) $x^2+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$x=0$일 때 $t=3$, $x=1$일 때 $t=4$이므로

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2+3}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{x^2+3}\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_3^4\sqrt{t}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_3^4=\mathbf{\frac{8}{3}-\sqrt{3}}$$

지/도/자/료

1. 복잡한 함수의 적분은 치환을 이용하면 편리하다는 것을 구체적인 예를 들어 이해시킨다. 이때 함수식을 치환하는 경우 적분 구간이 바뀌게 됨을 이해하게 한다.

2. 정적분의 치환적분법을 설명하는 데 부정적분을 이용하도록 한다. 이때, t에 대한 식을 x에 대한 식으로 고쳐서 부정적분을 x에 대한 식으로 나타내어야 하므로 $x=g(t)$는 역함수가 존재해야 한다는 것을 알게 한다.

따라서 구간 $[\alpha,\ \beta]$ 또는 $[\beta,\ \alpha]$에서 $g(t)$가 항상 증가하거나 항상 감소한다는 가정이 필요한 것이다. $x=g(t)$는 증가함수 또는 감소함수이고 연속인 도함수 $g'(t)$를 가지며 $f(g(t))$도 $[\alpha,\ \beta]$에서 연속이라는 조건이 필요하다.

그러나 고등학교 과정에서는 이와 같은 조건을 생각할 필요없이 처음부터 위의 조건을 만족하는 범위 안에서 치환적분을 다룬다.

6

목표| 치환적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $1+e^x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=e^x$

$x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=1+e$이므로

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx=\int_2^{1+e}\frac{1}{t}dt$$
$$=\Big[\ln|t|\Big]_2^{1+e}$$
$$=\ln(1+e)-\ln 2$$
$$=\mathbf{\ln\frac{1+e}{2}}$$

(2) $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$

$x=e$일 때 $t=1$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$$\int_e^{e^2}\frac{(\ln x)^2}{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int_e^{e^2}(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=-\frac{1}{2}\int_1^2 t^2\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_1^2$$
$$=-\frac{1}{6}(8-1)$$
$$=\mathbf{-\frac{7}{6}}$$

교과서 168 쪽

예제 04 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 4e^{4x-1}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$

풀이 (1) $4x-1=t$로 놓으면 $x=\dfrac{t+1}{4}$에서 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{4}$이고

$x=0$일 때 $t=-1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 4e^{4x-1}dx=\int_{-1}^3 e^t\,dt=\Big[e^t\Big]_{-1}^3=e^3-\frac{1}{e}$$

(2) $\ln x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx=\int_0^1 t\,dt=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1=\frac{1}{2}$$

답 (1) $e^3-\dfrac{1}{e}$ (2) $\dfrac{1}{2}$

문제 6 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$ (2) $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{(\ln x)^2}{-2x}dx$

예제 05 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos^2 x\sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cot x\,dx$

풀이 (1) $\cos x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos^2 x\sin x\,dx=\int_1^0(-3t^2)dt=\Big[-t^3\Big]_1^0=1$$

(2) $\sin x=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$이고

$x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}2\cot x\,dx=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=2\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{1}{t}dt=2\Big[\ln t\Big]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1=\ln 2$$

답 (1) 1 (2) $\ln 2$

문제 7 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx$

7

목표| 치환적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1-\cos^2 x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x\,dx$$

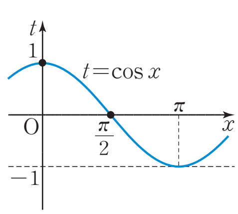
(i) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x\,dx$에서 $\cos x=t$로 놓으면

$\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$,

$x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin x\,dx$$
$$=\int_1^0 t^2\cdot(-1)dt=\int_0^1 t^2dt=\Big[\frac{1}{3}t^3\Big]_0^1=\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에 의하여

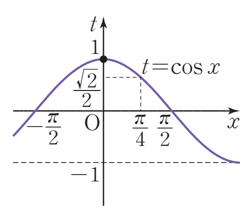
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=1-\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(2) $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$이므로 $\cos x=t$로 놓으면

$\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$

$x=0$일 때 $t=1$,

$x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로



$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$$
$$=\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t}\cdot(-1)dt$$
$$=-\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{t}dt=-\Big[\ln|t|\Big]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$=-\Big(\ln\frac{1}{\sqrt{2}}-0\Big)=\mathbf{\frac{1}{2}\ln 2}$$

예제 06 연속함수 $f(x)$에 대하여 다음이 성립함을 보여라.

$$f(-x)=f(x)\text{이면 } \int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

❶

풀이 정적분의 성질에 의하여 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$

$\int_{-a}^{0} f(x)dx$에서 $x=-t$로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=-1$이므로

$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{0}^{a} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(x)dx$

따라서 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$가 성립한다.

❷ **문제 8** 연속함수 $f(x)$에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면 $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$이 성립함을 보여라.

문제 9 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^{1} (x^5+x^4+\cdots+1)dx$ (2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - x\cos x)dx$

정적분에서 부분적분법을 어떻게 이용하는가?

부정적분의 부분적분법을 이용하여 정적분을 구하는 방법을 알아보자.

미분가능한 두 함수의 곱의 미분법에서

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 $f(x)g(x)$는 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$의 한 부정적분이다.

따라서

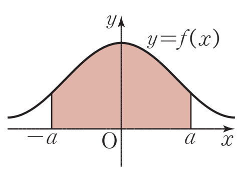
$$\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b=\int_a^b\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}dx =\int_a^b f'(x)g(x)dx+\int_a^b f(x)g'(x)dx$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

본문 해설

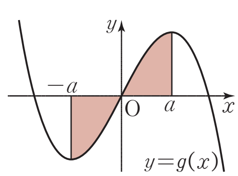
❶ $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 함수를 우함수라 하고 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.



따라서 함수 $f(x)$가 우함수일 때, 우함수는 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$

❷ $g(-x)=-g(x)$를 만족시키는 함수를 기함수라 하고 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



따라서 함수 $g(x)$가 기함수일 때, 기함수는 원점에 대하여 대칭이므로

$\int_{-a}^{a} g(x)dx=0$

8

목표| 구간 $[-a,\ a]$에서 그래프가 원점에 대칭인 함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| 정적분의 성질에 의하여

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$\int_{-a}^{0} f(x)dx$에서 $x=-t$로 놓으면

$\dfrac{dx}{dt}=-1$이므로

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=-\int_{0}^{a} f(x)dx$$

따라서 $\int_{-a}^{a} f(x)dx$

$$=-\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0$$

9

목표| 구간 $[-a,\ a]$에서 그래프가 y축과 원점에 대칭인 함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int_{-1}^{1} (x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)dx$

$$=2\int_{0}^{1}(x^4+x^2+1)dx$$

$$=2\Big[\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^1=\mathbf{\frac{46}{15}}$$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - x\cos x)dx$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$$

이때 $f(x)=x,\ g'(x)=\cos x$라고 하면

$f'(x)=1,\ g(x)=\sin x$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$$

$$=\Big[x\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

$$=\Big[x\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\Big[\cos x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)-0=0$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - x\cos x)dx$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$$

$$=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{2}$$

10

목표| 부분적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$$
$$=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\,dx$$
$$=0+\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{1}$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$이므로

$$\int_1^e \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot x\,dx$$
$$=e-\Big[x\Big]_1^e=e-(e-1)=\mathbf{1}$$

11

목표| 부분적분법을 두 번 활용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=e^x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면 $f'(x)=e^x$, $g(x)=-\cos x$이므로

$$\int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx$$

이때, $u(x)=e^x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=e^x$, $v(x)=\sin x$

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$$

따라서 $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx$

$$=-e^x\cos x+\left\{e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx\right\}$$

에서 $\displaystyle 2\int e^x\sin x\,dx=e^x(\sin x-\cos x)+C$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx=\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)}$$

단원 과제

목표| 정적분을 활용한 계산을 해 봄으로써 적분의 유용성을 알게 한다.

풀이| 지구의 반지름이 6400000 m이고, 국제 우주 정거장은 지구 표면으로부터 350000 m 떨어져 있으므로 소유즈 호가 필요한 에너지는

교과서 170 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고 $f'(x)$, $g'(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

예제 07 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e x\ln x\,dx$

풀이 (1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^1 xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx=e-\Big[e^x\Big]_0^1=1$$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{x^2}{2}$이므로

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

답 (1) 1 (2) $\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}$

문제 10 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$

발전

문제 11 정적분 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin x\,dx$를 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

지구 중심으로부터의 거리가 r m이고, 질량이 m kg인 물체가 받는 지구 중력장의 세기 $F(r)$N은 다음과 같다.

$$F(r)=G\frac{Mm}{r^2}$$

($M=5.975\times10^{24}$은 지구의 질량, $G=6.6720\times10^{-11}$은 만유인력 상수)

질량이 5000 kg인 소유즈 호가 지구 표면으로부터 350 km 떨어진 국제 우주 정거장으로 진입하기 위해 필요한 에너지를 구하여라. (단, 지구 반지름의 길이는 6400 km이다.)

$$\int_{6400000}^{6750000}\frac{5000MG}{r^2}dr=\left[-\frac{5000MG}{r}\right]_{6400000}^{6750000}=\mathbf{\frac{7MG}{172800}}$$

(단, $M=5.975\times10^{24}$, $G=6.6720\times10^{-11}$)

중/단/원 기초

1

목표| 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathbf{-\dfrac{2}{x}+C}$ (2) $\mathbf{2\sqrt{x}+\ln x+C}$

(3) $\mathbf{-\cos x+2\sin x+C}$ (4) $\mathbf{\sec x-\cos x+C}$

(5) $\mathbf{2e^x+\dfrac{3^x}{\ln 3}+C}$ (6) $\mathbf{e^{x+3}+C}$

2

목표| 치환적분법을 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2x-3=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=2$

$$\int(2x-3)^5\,dx=\int t^5\cdot\frac{1}{2}dt=\mathbf{\frac{1}{12}(2x-3)^6+C}$$

중단원 기초

[해답 p.216]

수준별 학습

1 다음 부정적분을 구하여라. — 01 여러 가지 함수의 부정적분

(1) $\int \frac{2}{x^2}dx$ (2) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$

(3) $\int (\sin x+2\cos x)dx$ (4) $\int (\sec x+\cos x)\tan x\,dx$

(5) $\int (2e^x+3^x)dx$ (6) $\int e^{x+3}dx$

2 다음 부정적분을 구하여라. — 02 치환적분법

(1) $\int (2x-3)^5 dx$ (2) $\int \sqrt{2-x}\,dx$

(3) $\int \cos(3x-2)dx$ (4) $\int e^{-4x+3}dx$

(5) $\int \frac{2x-1}{x^2-x+3}dx$ (6) $\int \frac{1}{x^2-4}dx$

3 다음 부정적분을 구하여라. — 03 부분적분법

(1) $\int xe^{-x}dx$ (2) $\int x\sin 4x\,dx$

4 다음 정적분을 구하여라. — 04 여러 가지 함수의 정적분 정적분의 치환적분법

(1) $\int_0^1 (2x-1)^4 dx$ (2) $\int_0^1 \frac{x}{3x^2+2}dx$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos x\,dx$ (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

(5) $\int_0^4 xe^{x^2}dx$ (6) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx$

5 다음 정적분을 구하여라. — 04 여러 가지 함수의 정적분 정적분의 부분적분법

(1) $\int_1^e 3\ln x\,dx$ (2) $\int_0^3 2xe^x dx$

---

(2) $2-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

$$\int \sqrt{2-x}\,dx=\int \sqrt{t}\cdot(-1)dt=\boldsymbol{-\frac{2}{3}(2-x)\sqrt{2-x}+C}$$

(3) $3x-2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3$

$$\int \cos(3x-2)dx=\int \cos t\cdot\frac{1}{3}dt$$

$$=\frac{1}{3}\sin t+C=\boldsymbol{\frac{1}{3}\sin(3x-2)+C}$$

(4) $-4x+3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-4$

$$\int e^{-4x+3}dx=\int e^t\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)dt=\boldsymbol{-\frac{1}{4}e^{-4x+3}+C}$$

(5) $$\int \frac{2x-1}{x^2-x+3}dx=\boldsymbol{\ln|x^2-x+3|+C}$$

(6) $$\int \frac{1}{x^2-4}dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}(\ln|x-2|-\ln|x+2|)+C$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C}$$

3

목표| 부분적분법을 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $$\int xe^{-x}dx=x(-e^{-x})-\int(-e^{-x})dx$$

$$=\boldsymbol{(-x-1)e^{-x}+C}$$

(2) $\int x\sin 4x\,dx$

$$=x\left(-\frac{\cos 4x}{4}\right)-\int\left(-\frac{\cos 4x}{4}\right)dx$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{4}x\cos 4x+\frac{1}{16}\sin 4x+C}$$

4

목표| 치환적분법을 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $2x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2$

$$\int_0^1 (2x-1)^4 dx=\int_{-1}^1 \frac{1}{2}t^4 dt=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

(2) $3x^2+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=6x$

$$\int_0^1 \frac{x}{3x^2+2}dx=\frac{1}{6}\int_2^5 \frac{1}{t}dt=\boldsymbol{\frac{1}{6}\ln\frac{5}{2}}$$

(3) $\sin x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\cos x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\cos x\,dx=\int_0^1 t^5 dt=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(4) $1+\cos x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-\sin x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\int_2^1 (-1)\frac{1}{t}dt=\int_1^2 \frac{1}{t}dt=\boldsymbol{\ln 2}$$

(5) $x^2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x$

$$\int_0^4 xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^{16} e^t dt=\boldsymbol{\frac{1}{2}(e^{16}-1)}$$

(6) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x}dx=\int_1^2 t\,dt=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

5

목표| 부분적분법을 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $$\int_1^e 3\ln x\,dx=\Big[3x\ln x\Big]_1^e-3\int_1^e dx=\boldsymbol{3}$$

(2) $$\int_0^3 2xe^x dx=\Big[2xe^x\Big]_0^3-2\int_0^3 e^x dx=\boldsymbol{4e^3+2}$$

중/단/원 기본

1

목표| 함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}=1+\cos x$

이므로

$f(x)=\int(1+\cos x)dx=x+\sin x+C$

이때, $f(0)=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=x+\sin x+2$이므로

$f(\pi)=\boldsymbol{\pi+2}$

2

목표| 분수함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2+ax+b=(x-2)(x-3)$이므로

$$\frac{2x+3}{x^2+ax+b}=\frac{2x+3}{(x-2)(x-3)}$$
$$=\frac{9}{x-3}-\frac{7}{x-2}$$

$$\int\frac{2x+3}{x^2+ax+b}dx=\int\left(\frac{9}{x-3}-\frac{7}{x-2}\right)dx$$
$$=9\ln|x-3|-7\ln|x-2|+C$$
$$=\boldsymbol{\ln\left|\frac{(x-3)^9}{(x-2)^7}\right|+C}$$

교과서 172 쪽

[해답 p.217]

중단원 기본

수준별 학습

1 함수 $f(x)=\int\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$에 대하여 $f(0)=2$일 때, $f(\pi)$의 값을 구하여라.

01 여러 가지 함수의 부정적분

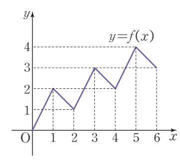
2 x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 실근이 2, 3일 때, 부정적분 $\int\dfrac{2x+3}{x^2+ax+b}dx$를 구하여라.

02 치환적분법
유리함수의 부정적분

3 정적분 $\int_0^{\pi}|\sin x\cos x|dx$를 구하여라.

04 여러 가지 함수의 정적분

4 $0\le x\le 6$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $\int_1^2 f(3x-2)dx$의 값을 구하여라.



04 여러 가지 함수의 정적분
정적분의 치환적분법

5 함수 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (0\le x\le 1)\\ 3-x & (1\le x\le 2)\end{cases}$에 대하여 정적분 $\int_0^2 e^x f(x)dx$의 값을 구하여라.

04 여러 가지 함수의 정적분
정적분의 부분적분법

3

목표| 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $\sin x\cos x\ge 0$, $\dfrac{\pi}{2}\le x\le\pi$에서 $\sin x\cos x\le 0$이므로

$$\int_0^{\pi}|\sin x\cos x|dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\cos x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓고 치환적분법을 이용하면

$$\int_0^{\pi}|\sin x\cos x|dx=\int_1^0(-t)dt-\int_0^{-1}(-t)dt=\mathbf{1}$$

4

목표| 치환적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $3x-2=t$로 놓으면 $\dfrac{dt}{dx}=3$이므로

$$\int_1^2 f(3x-2)dx=\frac{1}{3}\int_1^4 f(t)dt=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}+2+\frac{5}{2}\right)=\mathbf{2}$$

5

목표| 부분적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $$\int_0^2 e^x f(x)dx=\int_0^1 e^x(x+1)dx+\int_1^2 e^x(3-x)dx$$
$$=\Big[(x+1)e^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx$$
$$+\Big[(3-x)e^x\Big]_1^2+\int_1^2 e^x dx$$
$$=e+(2e^2-3e)=\boldsymbol{2e^2-2e}$$

중/단/원 실력

1

목표| 함수의 부정적분을 구하고 이를 활용할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\ln x$이므로 $g(x)=e^x$

$\int g(x-1)dx=\int e^{x-1}dx=e^{x-1}+C$이고

$h(1)=1$이므로 $h(x)=e^{x-1}$, $h(2)=\boldsymbol{e}$

교과서 173 쪽

중단원 **실력**

[해답 p.217]

수준별 학습

1 함수 $f(x)=x\ln x-x$의 도함수를 $f'(x)$라 하고, 함수 $f'(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 하자.
$\int g(x-1)dx=h(x)+C$가 성립하고 $h(1)=1$일 때, $h(2)$의 값을 구하여라. (단, C는 적분상수이다.)

01 여러 가지 함수의 부정적분

2 어느 제조 업체가 새로운 기술로 제품을 생산한 지 x개월 후의 이익을 $P(x)$ 천만 원이라고 하면 $P'(x)$는

$$P'(x)=3x^2e^{-x^3}$$

이라고 한다. 새로운 기술로 제품을 생산한 지 1개월 후의 이익이 3천만 원일 때, $P(x)$를 구하여라.

02 치환적분법

3 $0<x<\pi$에서 정의된 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=x\cos x$이고, $f(x)$의 최댓값이 $\frac{\pi}{2}$일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하여라.

03 부분적분법

4 연속함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x)+f(-x)=\cos\frac{x}{2}$$

일 때, $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$의 값을 구하여라.

04 여러 가지 함수의 정적분
정적분의 치환적분법

5 함수 $f(x)$가 $f(x)=x\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$를 만족시킬 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

04 여러 가지 함수의 정적분
정적분의 부분적분법

2

목표 | 치환적분법을 활용할 수 있게 한다.

풀이 | $P'(x)=3x^2e^{-x^3}$에서 $-x^3=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-3x^2$

$$P(x)=\int 3x^2e^{-x^3}dx=\int(-e^t)dt=-e^{-x^3}+C$$

새로운 기술로 제품을 생산한 지 1개월 후의 이익이 3천만 원이므로

$$P(1)=-e^{-1}+C=-\frac{1}{e}+C=3,\ C=3+\frac{1}{e}$$

$$P(x)=\boldsymbol{-e^{-x^3}+\frac{1}{e}+3}$$

3

목표 | 부분적분법을 활용할 수 있게 한다.

풀이 | $f(x)=\int f'(x)dx=\int x\cos x\,dx$

$$=x\sin x+\cos x+C$$

$0<x<\pi$일 때 $f'(x)=x\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	(최대)	↘	

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+C=\frac{\pi}{2}$에서 $C=0$

$f(x)=x\sin x+\cos x$에서

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{4}+1\right)}$$

4

목표 | 치환적분법을 활용할 수 있게 한다.

풀이 | $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx$

$\int_{-\pi}^{0}f(x)dx$에서 $-x=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=-1$

$$\int_{-\pi}^{0}f(x)dx=\int_{\pi}^{0}f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{0}^{\pi}f(-t)dt$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\int_{0}^{\pi}f(-t)dt+\int_{0}^{\pi}f(x)dx=\int_{0}^{\pi}\{f(-x)+f(x)\}dx=\int_{0}^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx=\boldsymbol{2}$$

5

목표 | 부분적분법을 활용할 수 있게 한다.

풀이 | $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=k$ (k는 상수)라고 하면

$f(x)=x\cos x+k$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t\cos t+k)dt=\Big[kt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left(\Big[t\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt\right)=\frac{\pi}{2}k+\frac{\pi}{2}-1=k$$

이때 $k=-1$이고 $f(x)=x\cos x-1$, $\boldsymbol{f(0)=-1}$

2 정적분의 활용

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

② 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 넓이	곡선과 x축 사이의 넓이
	두 곡선 사이의 도형의 넓이
02 부피	입체도형의 부피
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 174 쪽

2 정적분의 활용

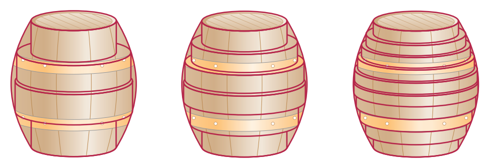
적분은 넓이를 구하는 것에서 출발하여 부피를 구하는 것으로 발전하였다.

케플러(Kepler, J. ; 1571～1630)가 살던 때 포도주의 가격은 포도주 통 안에 막대를 넣어 포도주가 채워져 있는 높이를 재서 결정하였다.

케플러는 당시 이 방법이 매우 불합리하다고 생각하였다. 포도주를 담는 통이 배가 볼록한 모양으로 실제 담겨져 있는 포도주의 양이 높이와 비례하지 않았기 때문이다.

예를 들어 막대로 잰 높이가 통의 $\frac{1}{4}$이라면 가격은 가득찬 경우의 $\frac{1}{4}$이지만 통은 아래로 갈수록 좁아져 실제 포도주의 양은 통의 $\frac{1}{4}$보다는 적다.

이에 케플러는 정확한 포도주 통의 부피를 구하기 위하여 다음 그림과 같이 포도주 통을 무수히 많은 얇은 원기둥으로 자르고 그 부피를 더하는 방법을 연구하였다.



단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 183 쪽

포도주 통의 부피를 구할 수 있을까?

들어가면서 오랫동안 구분구적법이 발달하였으나 처음으로 극한의 개념을 도입하여 넓이를 구한 사람은 케플러(Kepler, J. ; 1571～1630)이다. 케플러는 원의 넓이를 구하기 위하여 원을 작은 삼각형으로 분할하여 삼각형의 넓이의 합의 극한으로 원의 넓이를 계산하였다. 또한 그는 비록 간단한 도형이지만 부피를 구하기 어려운 포도주통의 부피를 계산하기 위하여 평면을 정해진 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 구하는 문제를 연구하였다.

이 단원에서는 앞 단원에서 배운 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준	성취 수준	
1. 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.	상	정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	중	정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	하	정적분을 이용하여 간단한 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
2. 입체도형의 부피를 구할 수 있다.	상	정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있다.
	중	단면의 넓이가 주어진 입체도형의 부피를 정적분을 이용하여 구할 수 있다.
	하	단면의 넓이가 주어진 입체도형의 부피를 정적분을 이용하여 표현할 수 있다.

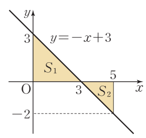
교과서 175 쪽

01 넓이

● 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

곡선과 좌표축 사이의 넓이는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=-x+3$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 직선 $y=-x+3$과 x축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. S_1, S_2를 각각 정적분으로 나타내어 보자.

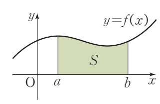
2. **1**의 정적분의 값을 각각 구하여 보자.

❶ 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때

넓이 S는 정적분의 정의에 의하여

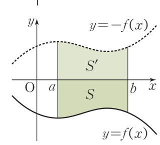
$$S=\int_a^b f(x)dx$$



(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때

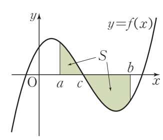
넓이 S는 곡선 $y=f(x)$를 x축에 대칭이동시킨 곡선 $y=-f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S'과 같으므로

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|dx$$



(iii) 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\geq 0$이고, 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때

$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$



01 넓이

소단원 지도 목표

① 주어진 구간에서 곡선과 x축 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

② 주어진 구간에서 곡선과 y축 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

③ 주어진 구간에서 두 곡선 사이의 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 정적분을 이용하여 넓이를 구할 때에는 곡선의 그래프를 그려서 곡선과 좌표축과의 위치 관계 등을 조사하고 계산하는 것이 편리하다.

2. 도형의 넓이를 구할 때 x에 대하여 적분하느냐, y에 대하여 적분하느냐에 따라서 계산 과정에 차이가 있음을 알게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • $f(x)\geq 0$인 구간에서는 정적분의 값이 도형의 넓이임을 알게 하고 $f(x)\leq 0$인 구간에서는 정적분이 음의 부호를 가진 넓이임을 알게 하여 정적분을 이용하여 넓이를 구하는 방법을 생각해 보게 하는 활동이다.

1. $S_1=\int_0^3(-x+3)dx$,

$S_2=-\int_3^5(-x+3)dx$

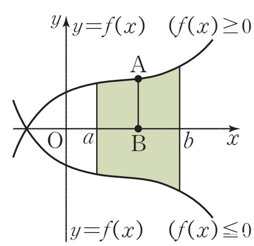
2. $S_1=\int_0^3(-x+3)dx=\left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^3=\mathbf{\frac{9}{2}}$

$S_2=-\int_3^5(-x+3)dx=-\left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_3^5$

$=-\left(\frac{5}{2}-\frac{9}{2}\right)=\mathbf{2}$

본문 해설

❶ 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.



(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$인 경우

넓이를 구하려는 도형은 길이가 $f(x)$인 선분 AB를 $x=a$에서 $x=b$까지 움직여서 만들어진 부분이므로

$$S=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\leq 0$인 경우

선분 AB의 길이가 $-f(x)$이므로

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|dx$$

(i), (ii)에 의하여 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 부호에 관계없이 $\overline{AB}=|f(x)|$이고, 구하는 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

본문 해설

❶ 구간 $[a, b]$에서
$f(x)\geq 0$일 때 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_a^b f(x)dx$이고
$f(x)\leq 0$일 때의 넓이는 $-\int_a^b f(x)dx$이다.
따라서 $[a, b]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 때에는 곡선의 그래프를 그리고 $f(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어 구한다.

교과서 176 쪽

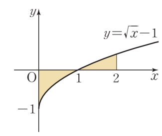
❶ 이상을 정리하면 다음과 같다.

> **곡선과 x축 사이의 넓이**
> 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는
> $$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

예제 01 곡선 $y=\sqrt{x}-1$과 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

곡선과 x축으로 둘러싸인 도형을 그래프로 그려 보고, $y\geq 0$인 구간과 $y\leq 0$인 구간으로 나누어 계산한다.

풀이 주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 1]$에서 $y\leq 0$이고, 구간 $[1, 2]$에서 $y\geq 0$이므로 넓이 S는



$$S=\int_0^2 |\sqrt{x}-1|dx$$
$$=\int_0^1(-\sqrt{x}+1)dx+\int_1^2(\sqrt{x}-1)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_1^2$$
$$=\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$$

답 $\frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)$

문제 1 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\frac{1}{x}$, x축, $x=-e$, $x=-1$

(2) $y=\sqrt{x-1}$, x축, $x=3$

문제 2 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\sin x\,(0\leq x\leq \pi)$, x축

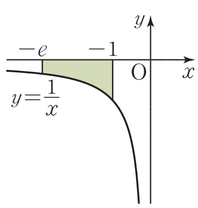
(2) $y=e^x$, x축, $x=0$, $x=2$

(3) $y=\ln x$, x축, $x=\frac{1}{e}$, $x=e$

1

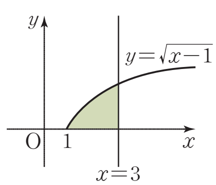
목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구하는 도형의 넓이를 S라 하자.



$$S=\int_{-e}^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\Big[-\ln|x|\Big]_{-e}^{-1}$$
$$=-\ln 1-(-\ln e)=\mathbf{1}$$

(2) 구하는 도형의 넓이를 S라 하자.

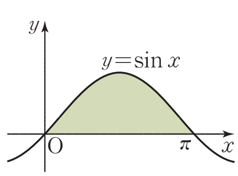


$$S=\int_1^3\sqrt{x-1}\,dx$$
$$=\frac{2}{3}\Big[(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big]_1^3=\mathbf{\frac{4\sqrt{2}}{3}}$$

2

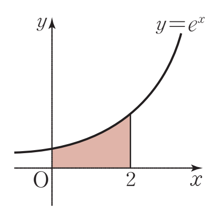
목표| 곡선과 x축, 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구하는 도형의 넓이를 S라 하자.



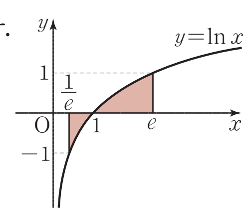
$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx$$
$$=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=-\cos\pi+\cos 0=\mathbf{2}$$

(2) 구하는 도형의 넓이를 S라 하자.



$$S=\int_0^2 e^x\,dx$$
$$=\Big[e^x\Big]_0^2=\mathbf{e^2-1}$$

(3) 구하는 도형의 넓이를 S라 하자.



$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}\ln x\,dx$$
$$=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x+\int_1^e\ln x\,dx$$
$$=-\left\{\Big[x\ln x\Big]_{\frac{1}{e}}^{1}-\int_{\frac{1}{e}}^{1}dx\right\}$$
$$+\left\{\Big[x\ln x\Big]_1^e-\int_1^e dx\right\}$$
$$=-\left\{\frac{1}{e}-\left(1-\frac{1}{e}\right)\right\}+\{e-(e-1)\}$$
$$=1-\frac{2}{e}+1$$
$$=\mathbf{2-\frac{2}{e}}$$

❶ 이제 곡선과 y축 사이의 넓이를 구하여 보자.

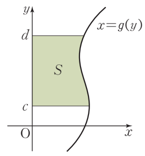
함수 $x=g(y)$가 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 구간 $[c,\ d]$에서 $g(y)\geq 0$이면

$$S=\int_c^d g(y)dy$$

이고, $g(y)\leq 0$이면

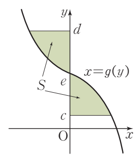
$$S=\int_c^d \{-g(y)\}dy$$

와 같다.



따라서 오른쪽 그림과 같이 구간 $[c,\ e]$에서 $g(y)\geq 0$이고, 구간 $[e,\ d]$에서 $g(y)\leq 0$이면 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d |g(y)|dy$$



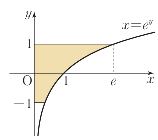
예제 02 곡선 $y=\ln x$와 y축 및 두 직선 $y=-1$, $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

풀이 $y=\ln x$를 x에 관하여 풀면 $x=e^y$

주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 구간 $[-1,\ 1]$에서 $e^y\geq 0$이므로 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^1 e^y dy=\left[e^y\right]_{-1}^1=e-\frac{1}{e}$$

답 $e-\frac{1}{e}$



문제 3 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\sqrt{2x}$, y축, $y=2$

(2) $y=\ln(x-1)$, y축, $y=-1$, $y=1$

문제 4 곡선 $y=e^x-1$과 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

본문 해설

❶ 도형의 모양에 따라 y에 대하여 적분하는 것이 계산이 편리한 경우가 있다. 이 경우 도형의 넓이는 축이 바뀌었을 뿐 x축으로 둘러싸인 도형의 경우와 마찬가지로 계산한다.

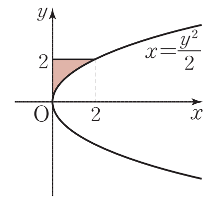
이때에도 $g(y)$의 값이 양수인 y의 구간과 음수인 y의 구간으로 나누어서 구하면 된다.

3

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구하는 도형의 넓이를 S라고 하자.

$y=\sqrt{2x}$를 x에 관하여 정리하면 $x=\frac{y^2}{2}$

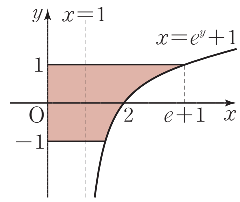


$$S=\int_0^2 \frac{y^2}{2}dy=\frac{1}{6}\left[y^3\right]_0^2=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

(2) 구하는 도형의 넓이를 S라 하자.

$y=\ln(x-1)$을 x에 관하여 정리하면

$x=e^y+1$



$$S=\int_{-1}^1 (e^y+1)dy$$
$$=\left[e^y+y\right]_{-1}^1=\mathbf{e-\frac{1}{e}+2}$$

4

목표| 곡선과 y축, 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 도형의 넓이를 S라고 하자.

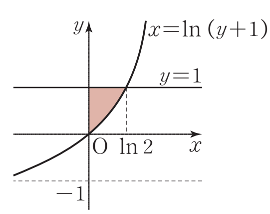
$y=e^x-1$을 x에 관하여 정리하면

$x=\ln(y+1)$

$y+1=t$라 하면 $\frac{dt}{dy}=1$

$y=0$일 때 $t=1$, $y=1$일 때 $t=2$이므로

$$S=\int_0^1 \ln(y+1)dy$$
$$=\int_1^2 \ln t\ dt$$
$$=\left[t\ln t\right]_1^2-\int_1^2 dt$$
$$=2\ln 2-(2-1)$$
$$=\mathbf{2\ln 2-1}$$

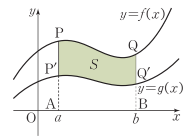


교과서 178 쪽

❶ 이제 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 알아보자.

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

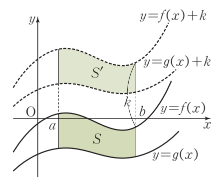
(i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge g(x)\ge 0$일 때 넓이 S는 도형 PABQ의 넓이에서 도형 P′ABQ′의 넓이를 뺀 것과 같으므로



$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

이다.

(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 $f(x)$ 또는 $g(x)$의 값이 음수일 때 오른쪽 그림과 같이 두 곡선을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여



$f(x)+k\ge g(x)+k\ge 0$

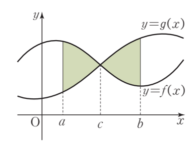
이 되게 할 수 있다.

따라서 넓이 S는 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 곡선 $y=f(x)+k$와 $y=g(x)+k$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S'과 같으므로

$$S=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

이다.

❷ (iii) 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x)\ge g(x)$이고 구간 $[c,\ b]$에서 $f(x)\le g(x)$일 때 넓이 S는 구간을 $[a,\ c]$와 $[c,\ b]$로 나누어 구하면

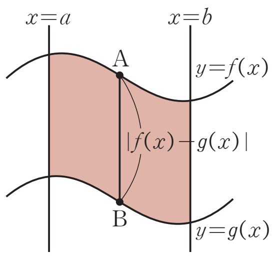


$$S=\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx+\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)-g(x)|dx+\int_c^b |f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

이다.

본문 해설

❶ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.



구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge g(x)$이면 넓이를 구하려는 도형은 길이가 $f(x)-g(x)$인 선분 AB를 $x=a$에서 $x=b$까지 움직여서 만들어진 부분이므로

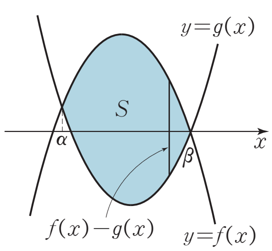
$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

한편 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\le g(x)$이면 선분 AB의 길이가 $g(x)-f(x)$이므로 $f(x)$와 $g(x)$의 크기에 관계없이 선분 AB의 길이는 $|f(x)-g(x)|$이다.

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

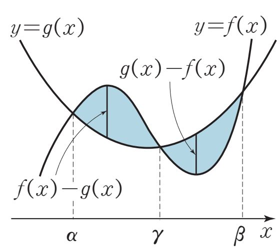
❷ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.
방정식 $f(x)=g(x)$를 풀어 교점의 x좌표를 찾아서 적분 구간을 정한다.

(1) $f(x)=g(x)$의 근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이고 구간 $[\alpha,\ \beta]$에서 $f(x)\ge g(x)$인 경우



$$S=\int_\alpha^\beta \{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$$

(2) $f(x)=g(x)$의 근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$이고 구간 $[\alpha,\ \gamma]$에서 $f(x)\ge g(x)$, 구간 $[\gamma,\ \beta]$에서 $f(x)\le g(x)$인 경우



$$S=\int_\alpha^\gamma \{f(x)-g(x)\}dx+\int_\gamma^\beta \{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_\alpha^\gamma |f(x)-g(x)|dx+\int_\gamma^\beta |f(x)-g(x)|dx$$
$$=\int_\alpha^\beta |f(x)-g(x)|dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

예제 03 두 곡선 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 및 두 직선 $x=0$, $x=\pi$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

적분 구간을 찾기 위하여 두 곡선의 교점의 x좌표를 구한다.

풀이 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$\sin x=\cos x\,(0\le x\le\pi)$에서 $x=\frac{\pi}{4}$

이때 구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에서 $\sin x\le\cos x$이고,

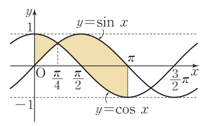
구간 $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$에서 $\sin x\ge\cos x$이므로

구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^\pi |\sin x-\cos x|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sin x-\cos x)dx$$

$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}=2\sqrt{2}$$



답 $2\sqrt{2}$

문제 5 다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\sqrt{x}$, $y=x$

(2) $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=-1$, $x=2$

(3) $y=\sin x$, $y=\cos x-1$, $x=0$, $x=\pi$

(4) $y=\ln(x+1)$, $y=-\sin x$, $x=\pi$

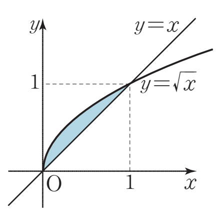
5

목표| 정적분을 이용하여 곡선과 곡선, 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

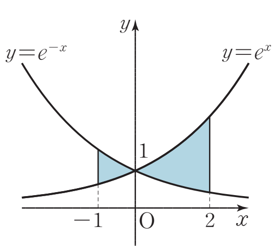
풀이| (1) $\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{6}}$$



(2)



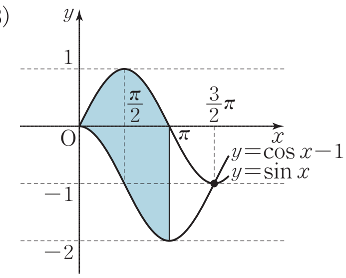
$e^x=e^{-x}$에서 $x=0$

$$\int_{-1}^0(e^{-x}-e^x)dx+\int_0^2(e^x-e^{-x})dx$$

$$=\Big[-e^{-x}-e^x\Big]_{-1}^0+\Big[e^x+e^{-x}\Big]_0^2$$

$$=\mathbf{e^2+e+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}-4}$$

(3)



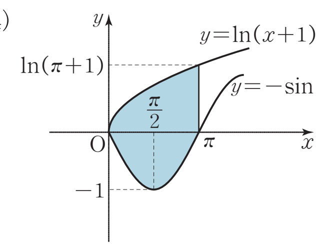
$\sin x=\cos x-1$, $\sin x-\cos x=-1$,

$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$에서 $x=0$, $x=\frac{3}{2}\pi$

$$\int_0^\pi\{(\sin x)-(\cos x-1)\}dx$$

$$=\Big[-\cos x-\sin x+x\Big]_0^\pi=\mathbf{\pi+2}$$

(4)



$$\int_0^\pi\{\ln(x+1)-(-\sin x)\}dx$$

$$=\int_0^\pi \ln(x+1)dx+\int_0^\pi \sin x\,dx$$

이때 $\int_0^\pi \ln(x+1)dx$

$$=x\ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}dx$$

$$=x\ln(x+1)-\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=x\ln(x+1)-\int dx+\int\frac{1}{x+1}dx$$

$$=x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)+C$$

이므로

$$\int_0^\pi\{\ln(x+1)-(-\sin x)\}dx$$

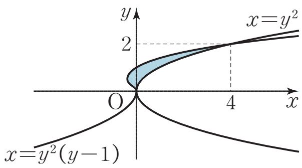
$$=\Big[x\ln(x+1)-x+\ln(x+1)\Big]_0^\pi+\Big[-\cos x\Big]_0^\pi$$

$$=\mathbf{(\pi+1)\ln(\pi+1)-\pi+2}$$

6

목표| 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구하는 도형의 넓이를 S라고 하자.



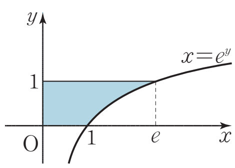
$y^2=y^2(y-1)$에서 $\quad y=0,\ y=2$

$$S=\int_0^2\{y^2-y^2(y-1)\}dy$$

$$=\int_0^2(-y^3+2y^2)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{4}y^4+\frac{2}{3}y^3\right]_0^2=\mathbf{\frac{4}{3}}$$

(2) 구하는 도형의 넓이를 S라 하자.



$y=\ln x$에서 $\quad x=e^y$

$$S=\int_0^1 e^y dy=\left[e^y\right]_0^1=\mathbf{e-1}$$

7

목표| 정적분을 이용하여 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y'=\dfrac{1}{x}$이므로 $x=e$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{e}$

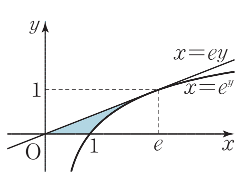
따라서 곡선 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$$

따라서 접선의 방정식은 $\quad y=\dfrac{1}{e}x$, 즉 $x=ey$

$y=\ln x$에서 $x=e^y$

구하는 도형의 넓이 S는 곡선 $x=e^y$과 x축 및 직선 $x=ey$로 둘러싸인 도형의 넓이이므로



$$S=\int_0^1(e^y-ey)dy$$

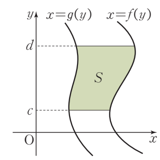
$$=\left[e^y-\frac{e}{2}y^2\right]_0^1=\mathbf{\frac{e}{2}-1}$$

교과서 180 쪽

두 곡선 사이의 넓이를 구할 때, 도형의 모양에 따라 y에 대하여 적분하는 것이 편리한 경우도 있다.

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $x=f(y)$와 $x=g(y)$가 구간 $[c,\ d]$에서 연속이고, 두 곡선 $x=f(y)$와 $x=g(y)$ 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d|f(y)-g(y)|dy$$



예제 04 곡선 $y^2=x$와 직선 $y=x-2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

풀이 주어진 곡선과 직선의 교점의 y좌표는

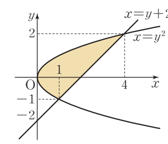
$y^2=y+2$에서 $\quad y^2-y-2=0$

$y=-1$ 또는 $y=2$

주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 구간 $[-1,\ 2]$에서 $y^2\le y+2$이므로 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^2\{(y+2)-y^2\}dy=\int_{-1}^2(-y^2+y+2)dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-1}^2=\frac{9}{2}$$



답 $\dfrac{9}{2}$

문제 6 다음 곡선 또는 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

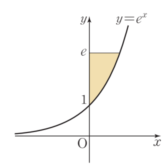
(1) $x=y^2$, $x=y^2(y-1)$ (2) $y=\ln x$, x축, y축, $y=1$

문제 7 곡선 $y=\ln x$와 이 곡선 위의 점 $(e,\ 1)$에서의 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

곡선 $y=e^x$과 y축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하려고 한다. 적분 변수를 x로 놓는 방법과 적분 변수를 y로 놓는 방법으로 각각 해결하고, 그 과정을 설명하여 보자.



사고력 기르기 추론

출제 의도| 정적분을 이용하여 적분변수를 x로 놓는 방법과 적분변수를 y로 놓는 방법으로 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 구하는 도형의 넓이를 S라고 하자.

적분변수를 x로 놓으면

$$S=\int_0^1(e-e^x)dx=\left[ex-e^x\right]_0^1=1$$

적분변수를 y로 놓으면

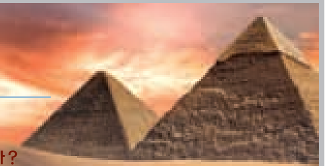
$$S=\int_1^e \ln y\,dy=\left[y\ln y\right]_1^e-\int_1^e dy$$

$$=e-\left[y\right]_1^e=\mathbf{1}$$

교과서 181 쪽

02 부피

● 입체도형의 부피를 구할 수 있다.

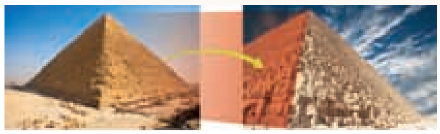


입체도형의 부피는 어떻게 구하는가?

생각 열기

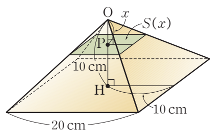
피라미드

현재 이집트 전 지역에서 발견된 피라미드는 94개이다. 그중 가장 대표적인 것이 기자(Giza) 지역의 기원전 2580～2560년에 만들어진 쿠푸 왕의 피라미드로 세계 7대 불가사의 가운데 가장 오래된 건축물이며, 지금까지 유일하게 남아 있는 건축물이다.



탐구 활동

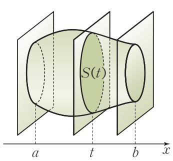
오른쪽 그림과 같이 밑면은 한 변의 길이가 20 cm인 정사각형이고, 높이가 10 cm인 정사각뿔이 있다. 입체도형의 꼭짓점 O로부터 거리가 x인 점 P에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$일 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 단면의 넓이 $S(x)$를 구하여 보자.
2. $\int_0^{10} S(x)dx$의 값과 이 입체도형의 부피를 비교하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 어떤 입체도형이 주어졌을 때, 한 직선을 x축으로 정하고, x좌표가 a, b인 두 점을 지나 x축에 수직인 두 평면 사이에 있는 부분의 부피 V를 구하여 보자.

x좌표가 t인 점에서 x축과 수직인 평면으로 입체도형를 자를 때 생기는 단면의 넓이를 $S(t)$라고 하자.



여기서는 이를 일반적인 입체로 확장하여 구분구적법을 적용시켜 부피를 구할 때 그 식이 정적분으로 나타내어짐을 이해시켜야 한다. 일단 입체의 부피가 정적분으로 표현이 되면 미적분의 기본 정리를 이용하여 계산할 수 있음을 알게 한다.

생각 열기 참/고/자/료

이집트의 피라미드는 예전의 파라오와 왕비, 왕족의 사후에 영원한 생명을 보장받기 위해 세운 것으로서 기자지구의 쿠푸왕의 피라미드, 카프레 왕의 피라미드, 멘카우레 왕의 피라미드 등 3개의 큰 피라미드가 있다. 이는 파라오를 비롯한 왕족들의 영원의 안식처 역할을 한다. 이 중 세계7대 불가사의인 쿠푸왕의 피라미드의 크기는 높이 146.5 m(현재 137 m), 저변 230 m, 사면각도 51° 52′이다.

02 부피

소단원 지도 목표

① 단면의 넓이와 입체의 부피 사이의 관계를 알고 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 입체도형의 부피를 구하기 위해서는 기준이 되는 축에 수직인 평면으로 자른 입체도형의 단면의 넓이를 알아야 구할 수 있음을 알게 한다.

2. 구분구적법에서 원뿔을 n개의 원기둥으로 세분하여 이들의 부피의 합을 구하고 그 극한값으로 원뿔의 부피를 구할 수 있음을 알게 하였다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 뿔의 꼭짓점에서 절단면까지의 거리 x에 대하여 단면의 넓이가 x에 대한 함수 $S(x)$로 나타내어지고 주어진 구간에서 $S(x)$는 연속함수임을 알게 하였다.
이때, 단면의 넓이 $S(x)$를 입체도형의 높이에 대하여 적분하여 구한 값과 실제로 구한 입체도형의 부피를 비교하여 보는 활동이다.

1. 단면은 정사각형이고 한 변의 길이가 $2x$이므로 넓이는 $\boldsymbol{4x^2}$이다.

2. $\int_1^{10} 4x^2dx = \left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^{10} = \frac{4000}{3}$,

입체도형의 부피는 $\frac{1}{3}\times 20^2\times 10 = \frac{4000}{3}$

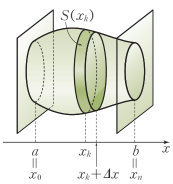
서로 같다.

교과서 182 쪽

❶ 또 x축 위의 구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 양 끝 점을 포함한 각 분점의 x좌표를 차례로

$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라 하고, 각 소구간의 길이를 $\varDelta x$라고 하자. 이때 x좌표가 x_k인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x_k)$라고 하면 밑면의 넓이가 $S(x_k)$이고 높이가 $\varDelta x$인 기둥의 부피는 $S(x_k)\varDelta x$이므로 이들 기둥 n개의 부피의 합 V_n은



$$V_n=\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\varDelta x$$

이다. 따라서 구분구적법과 정적분의 정의에 의하여 구하는 입체도형의 부피 V는 다음과 같다.

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\varDelta x=\int_a^b S(x)dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

입체도형의 부피

구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체도형의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx \text{ (단, } S(x)\text{는 구간 } [a,\ b]\text{에서 연속)}$$

예제 01 어떤 물잔에 물을 부으면 물의 깊이가 x cm일 때 수면의 넓이는 $2\sqrt{x}$ cm²라고 한다. 물의 깊이가 6 cm일 때 물잔에 담긴 물의 부피를 구하여라.

풀이 단면의 넓이 $S(x)$라고 하면

$S(x)=2\sqrt{x}$

구하는 부피 V는

$V=\int_0^6 2\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^6=8\sqrt{6}(\text{cm}^3)$

답 $8\sqrt{6}$ cm³

문제 1 어떤 그릇에 물을 부으면 깊이가 x cm일 때 수면은 한 변의 길이가 $\sqrt{20-2x}$ cm인 정사각형이라고 한다. 그릇의 높이가 8 cm일 때 그릇에 가득 담긴 물의 부피를 구하여라.

본문 해설

❶ 입체도형의 부피 V는 n개의 기둥들의 부피의 합 V_n의 극한으로 구할 수 있으며 이들 사이의 관계는

$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\int_a^b S(x)dx$

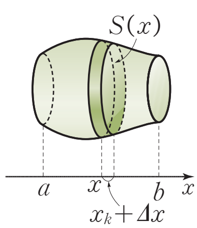
단, $S(x)$는 x축에 수직인 평면으로 잘랐을 때 그 잘린 부분의 넓이이다. 이 식에서 $S(x)$는 n개의 기둥의 밑넓이에 해당하며 dx는 각각 기둥의 높이에 해당하므로 정적분을 활용하여 부피를 구할 수 있다.

단면의 넓이 $S(x)$가 연속함수이면 입체도형의 부피 V는

$V=\int_a^b S(x)dx$

임을 알아보자.

오른쪽 그림에서 구간 $[a,\ b]$ 사이의 임의의 점 x에 대하여 a에서 x까지 그 사이에 있는 부분의 부피를 $V(x)$라고 하면, x의 증분 $\varDelta x$에 대한 부피 $V(x)$의 증분 $\varDelta V(x)$는



$\varDelta V(x)=V(x+\varDelta x)-V(x)$

이다.

구간 $[x,\ x+\varDelta x]$에서 단면의 넓이의 최댓값과 최솟값을 각각 M_x, m_x라고 하면

$m_x\cdot\varDelta x\le V(x+\varDelta x)-V(x)\le M_x\cdot\varDelta x$

즉 $m_x\le\dfrac{V(x+\varDelta x)-V(x)}{\varDelta x}\le M_x$

여기서 단면의 넓이 $S(x)$가 연속함수이므로

$\varDelta x\to 0$이면 $m_x\to S(x)$, $M_x\to S(x)$이다.

그러므로

$V'(x)=\lim_{\varDelta x\to 0}\dfrac{V(x+\varDelta x)-V(x)}{\varDelta x}=S(x)$

$V'(x)=S(x)$이므로 $V(x)$는 $S(x)$의 한 부정적분이다.

따라서

$\int_a^b S(x)dx=\Big[V(x)\Big]_a^b=V(b)-V(a)$

이때, $V(a)=0$이므로 구하는 입체도형의 부피 V는

$V=V(b)=\int_a^b S(x)dx$

1

목표| 수면의 넓이가 단면의 넓이임을 알고 정적분을 이용하여 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| $S(x)=20-2x$이고 그릇의 높이가 8 cm이므로 구하는 부피 V는

$V=\int_0^8(20-2x)dx$

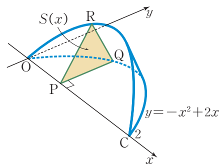
$=\Big[20x-x^2\Big]_0^8=\mathbf{96(cm^3)}$

교과서 183 쪽

예제 02

❶

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$, $\mathrm{Q}(x,\ -x^2+2x)$를 이은 선분을 한 변으로 하고, 이 평면에 수직으로 세운 정삼각형 PQR를 만든다. 점 P가 원점에서 점 $\mathrm{C}(2,\ 0)$까지 x축 위를 움직일 때, △PQR가 그리는 입체도형의 부피를 구하여라.



풀이 $\overline{\mathrm{PQ}}=-x^2+2x$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 한 변으로 하는 정삼각형 PQR의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{\mathrm{PQ}}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}(-x^2+2x)^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-4x^3+4x^2)$$

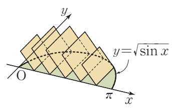
따라서 구하는 부피 V는

$$V=\int_0^2\frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-4x^3+4x^2)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\frac{4\sqrt{3}}{15}$$

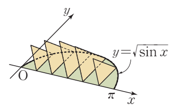
답 $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

문제 2 곡선 $y=\sqrt{\sin x}$ $(0\le x\le\pi)$와 x축으로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 다음과 같은 입체도형의 부피를 구하여라.

(1) 정사각형



(2) 정삼각형



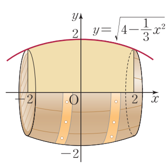
단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 포도주 통의 두 밑면의 중심을 x축 위에 두었을 때, x축과 수직인 평면으로 자른 단면은 반지름의 길이가 $\sqrt{4-\frac{1}{3}x^2}$인 원이라고 한다. 다음 물음에 답하여라. (단, 포도주 통의 두께는 무시한다.)

(1) 포도주 통의 부피를 구하여라.

(2) 세워져 있는 포도주 통 깊이의 $\frac{1}{4}$만큼 포도주가 들어 있을 때, 포도주의 부피를 구하여라.



단원 과제

목표| 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 포도주 통을 x축과 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$$S(x)=\pi\left(4-\frac{1}{3}x^2\right)$$

따라서 포도주 통의 부피 V는

$$V=\int_{-2}^{2}\pi\left(4-\frac{1}{3}x^2\right)dx$$
$$=2\pi\int_0^2\left(4-\frac{1}{3}x^2\right)dx$$
$$=2\pi\left[4x-\frac{x^3}{9}\right]_0^2=\mathbf{\frac{128}{9}\pi}$$

(2) 세워져 있는 포도주 통에 깊이의 $\frac{1}{4}$만큼 포도주가 들어 있을 때, 포도주의 부피 V는

$$V=\int_{-2}^{-1}\pi\left(4-\frac{1}{3}x^2\right)dx$$
$$=\pi\left[4x-\frac{x^3}{9}\right]_{-2}^{-1}=\mathbf{\frac{29}{9}\pi}$$

본문 해설

❶ 입체도형의 부피를 정적분으로 구할 때 그 단면의 넓이는 적분변수의 축에 반드시 수직이 되어야 한다.

2

목표| 정적분을 이용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $S=(\sqrt{\sin x})^2=\sin x$이므로 부피 V는

$$V=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=\mathbf{2}$$

(2) $S=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{\sin x})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x$이므로 부피 V는

$$V=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{3}}{4}\sin x\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

읽/기/자/료 포도주의 신계량법

천문학자이자 수학자인 케플러(Kepler, J.; 1571～1630)는 포도주 통과 같은 용기의 부피를 측정하는 방법이 담긴 “포도주 통의 신계량법(Nova stereometria doliorum vinariorum)”이라는 책을 통하여 적분 개념을 이용한 부피 계산법을 발표하였다. 케플러는 통의 표면이 직선이 아니기 때문에 얇은 원판을 무한히 겹쳐 놓아 부피를 측정하였고, 모든 물체의 부피를 계산하는 데 이 방법과 유사한 것을 사용할 수 있다는 것을 깨달았다.

또한 케플러는 원뿔 곡선이 만들어 내는 원, 타원, 포물선 등의 도형에 이를 일반화시키려고 하였다. 케플러는 원뿔 곡선이 만들어 내는 원, 타원, 포물선 등의 도형에 이를 일반화시키려고 하였다. 케플러의 이론은 정밀성은 다소 떨어졌지만, 이 책은 17세기 적분학의 기초가 되었다.

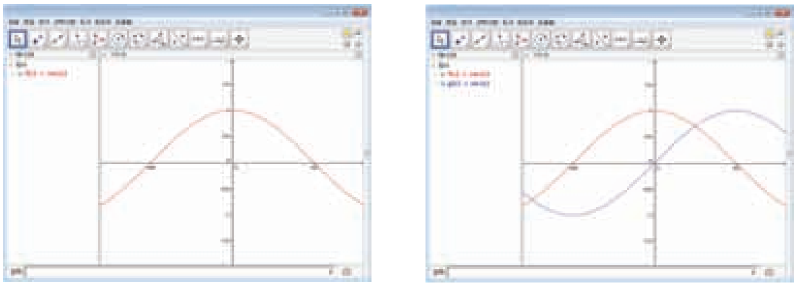
컴퓨터의 활용

삼각함수의 정적분을 구하여 보자.

기하 작도용 소프트웨어를 이용하면 부정적분 및 정적분을 쉽게 구할 수 있다.

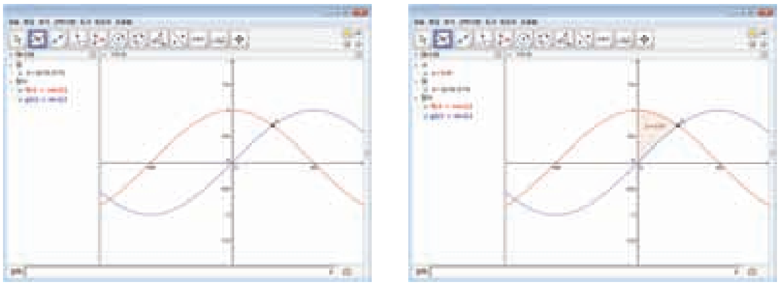
1 함수 $f(x)=\cos x$의 부정적분을 구하여 보자.

1. 화면의 아래쪽에 있는 입력창에 '$f(x)=\cos(x)$'를 입력하고 Enter키를 누르면 다음 그림과 같이 함수 $f(x)=\cos x$의 그래프가 그려진다.
2. 입력창에 '적분[$f(x)$]'를 입력하고 Enter키를 누르면 함수 $f(x)$의 부정적분 중에서 원점 O를 지나는 함수 $g(x)=\sin x$의 그래프가 그려진다.



2 이제 두 함수 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여 보자.

1. 도구상자에서 '두 대상의 교점'을 선택하고 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 각각 클릭하여 교점 $(0.79,\ 0.71)$을 구한다.
2. 입력창에 '적분[$f(x)$, $g(x)$, 0, 0.79]'를 입력하면 두 함수 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있다.



중단원 기초

[해답 p.218]

수준별 학습

1 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\cos x\ (0\le x\le \pi)$, x축

(2) $y=\sqrt{x}$, x축, $x=1$, $x=2$

(3) $y=e^x-1$, x축, $x=-1$, $x=1$

01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

2 다음 곡선과 직선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\dfrac{2}{x}$, $y=-x+3$

(2) $y=\cos x$, $y=\sin x\ (0\le x\le 2\pi)$

01 넓이

3 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=\sqrt{x+1}-1$, y축, $y=-1$, $y=1$

(2) $y=\ln x$, $y=x$, $y=1$, $y=3$

01 넓이

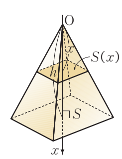
4 높이가 10 cm인 어떤 그릇에 물을 부으면 물의 깊이가 x cm일 때 수면은 한 변의 길이가 $(x+2)$ cm인 정사각형 모양이라고 한다. 이 그릇에 물을 가득 담을 때, 담긴 물의 부피를 구하여라. (단, 그릇의 두께는 무시한다.)

02 부피

5 오른쪽 그림과 같이 밑면의 넓이가 S이고 높이가 h인 사각뿔이 있다. 이 사각뿔의 꼭짓점 O를 원점, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 x축으로 할 때, 다음을 구하여라.

(1) x좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이 $S(x)$

(2) 정적분을 이용한 사각뿔의 부피 V



02 부피

중/단/원 기초

1

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $S=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos x)dx$

$=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\mathbf{2}$

(2) $S=\displaystyle\int_1^2\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\Big[x^{\frac{3}{2}}\Big]_1^2=\mathbf{\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)}$

(3) $S=\displaystyle\int_{-1}^0(-e^x+1)dx+\int_0^1(e^x-1)dx=\boldsymbol{e+\frac{1}{e}-2}$

2

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 곡선 $xy=2$와 직선 $x+y=3$의 교점의 x좌표는 $x=1$ 또는 $x=2$

$S=\displaystyle\int_1^2\left(3-x-\frac{2}{x}\right)dx=\mathbf{\frac{3}{2}-2\ln 2}$

(2) $\cos x=\sin x$에서

$x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{5\pi}{4}\quad(0\le x\le 2\pi)$

$S=\displaystyle\int_0^{2\pi}|\cos x-\sin x|dx$

$=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx$

$+\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(-\cos x+\sin x)dx$

$+\displaystyle\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x-\sin x)dx$

$=(\sqrt{2}-1)+2\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})=\mathbf{4\sqrt{2}}$

3

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=\sqrt{x+1}-1$에서

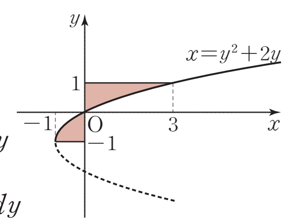
$x=y^2+2y$

$S=\displaystyle\int_{-1}^1|y^2+2y|dy$

$=\displaystyle\int_{-1}^0(-y^2-2y)dy$

$+\displaystyle\int_0^1(y^2+2y)dy$

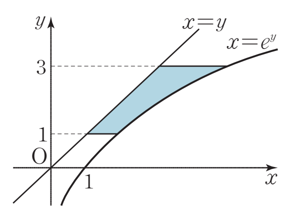
$=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=\mathbf{2}$



(2) 곡선 $y=\ln x$에서 $x=e^y$

$S=\displaystyle\int_1^3(e^y-y)dy$

$=\Big[e^y-\dfrac{1}{2}y^2\Big]_1^3=\boldsymbol{e^3-e-4}$



4

목표| 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| $S(x)=(x+2)^2$

$V=\displaystyle\int_0^{10}(x+2)^2dx=\int_0^{10}(x^2+4x+4)dx$

$=\Big[\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+4x\Big]_0^{10}=\mathbf{\dfrac{1720}{3}(cm^3)}$

5

목표| 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2:h^2=S(x):S$에서 $S(x)=\boldsymbol{\dfrac{x^2}{h^2}S}$

(2) $V=\displaystyle\int_0^h\frac{x^2}{h^2}S\,dx=\frac{S}{h^2}\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^h=\boldsymbol{\frac{1}{3}Sh}$

중/단/원 기본

1

목표| 접선의 방정식을 구하고 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $S=\int_0^1\left\{\frac{y+2}{3}-\sqrt[3]{y}\right\}dy$

$=\left[\frac{1}{6}y^2+\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{12}}$

2

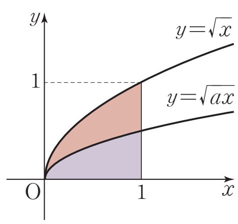
목표| 주어진 도형의 넓이에 대한 식을 이용하게 한다.

풀이| $\int_0^1\sqrt{x}\,dx$

$=2\int_0^1\sqrt{ax}\,dx$이고

$\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=\frac{2}{3}$



$2\int_0^1\sqrt{ax}\,dx$에서 $ax=t$라고 하면 $\frac{dt}{dx}=a$

$2\int_0^1\sqrt{ax}\,dx=2\int_0^a\sqrt{t}\cdot\frac{1}{a}dt=\frac{4}{3}\sqrt{a}$

즉 $\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{a}$, $\mathbf{a=\frac{1}{4}}$

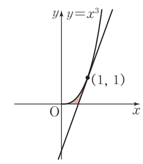
교과서 186 쪽

[해답 p.219]

중단원 기본

수준별 학습

1 곡선 $y=x^3\ (x\ge0)$과 이 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

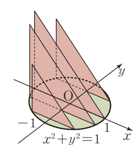
2 곡선 $y=\sqrt{x}$와 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이가 곡선 $y=\sqrt{ax}$ $(a>0)$에 의하여 이등분될 때, a의 값을 구하여라.

01 넓이

3 두 곡선 $y=\ln x$, $y=-\ln x$와 두 직선 $y=-1$, $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

01 넓이
두 곡선 사이의 넓이

4 원 $x^2+y^2=1$로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 y축에 수직인 평면으로 자른 단면이 직각이등변삼각형일 때, 입체도형의 부피를 구하여라.



02 부피

5 정적분을 이용하여 다음의 부피를 구하는 방법을 설명하여라.

(1) 밑면의 반지름의 길이가 r이고, 높이가 h인 원뿔

(2) 반지름의 길이가 r인 구

02 부피

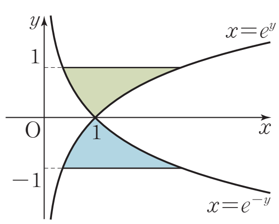
3

목표| 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $S=\int_{-1}^1|e^y-e^{-y}|dy$

$=2\int_0^1(e^y-e^{-y})dy$

$=\mathbf{2e+\frac{2}{e}-4}$



4

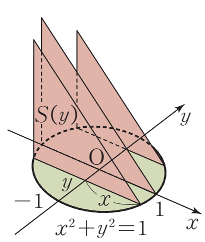
목표| 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 직각이등변삼각형의 밑변의 길이를 l이라고 하면 $x^2+y^2=1$에서

$l=2x=2\sqrt{1-y^2}$

$S(y)=\frac{l^2}{2}=2(1-y^2)$

$V=\int_{-1}^1 2(1-y^2)dy=\mathbf{\frac{8}{3}}$



5

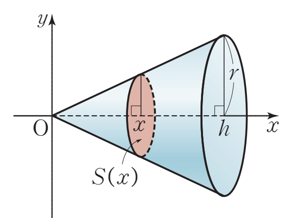
목표| 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\pi r^2 : S(x)=h^2 : x^2$

이므로 $S(x)=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2$

$V=\int_0^h\frac{\pi r^2}{h^2}x^2\,dx$

$=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h=\mathbf{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$



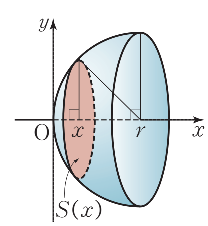
(2) $S(x)=\pi\{\sqrt{r^2-(r-x)^2}\}^2$

$=\pi(2rx-x^2)$

이므로 반구의 부피는

$\int_0^r\pi(2rx-x^2)dx=\frac{2}{3}\pi r^3$

$V=\frac{2}{3}\pi r^3\times2=\mathbf{\frac{4}{3}\pi r^3}$



교과서 187 쪽

중단원 실력

[해답 p.219]

수준별 학습

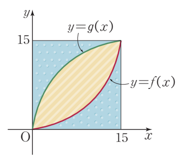
1 곡선 $y=(x-1)(x+1)(x+a)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 최소로 하는 실수 a의 값을 구하여라. (단, $-1<a<1$)

01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

2 곡선 $y=\cos x\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=a\sin x$가 이등분할 때, 양수 a의 값을 구하여라.

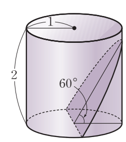
01 넓이

3 오른쪽 그림과 같이 정사각형 모양의 타일이 좌표평면 위의 x축, y축과 일치되게 놓여 있다. 이 타일에 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 경계로 하여 노란색과 파란색이 칠해지는 부분의 넓이의 비가 $2:3$일 때, $\int_0^{15}g(x)dx$의 값을 구하여라. (단, 함수 $y=g(x)$는 함수 $y=f(x)$의 역함수이다.)



01 넓이

4 밑면의 반지름의 길이가 1이고, 높이가 2인 원기둥이 있다. 이 밑면의 지름을 포함하고 밑면과 60°를 이루는 평면으로 원기둥을 자를 때 생기는 입체도형 중에서 작은 쪽의 부피를 구하여라.



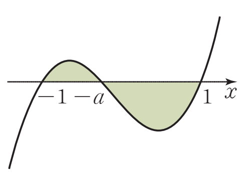
02 부피

중/단/원 실력

1

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $S(a)$



$=\int_{-1}^{-a}(x^3+ax^2-x-a)dx$

$\quad-\int_{-a}^{1}(x^3+ax^2-x-a)dx$

$=-\frac{1}{6}a^4+a^2+\frac{1}{2}$

$S'(a)=2a\left(-\frac{1}{3}a^2+1\right)=0$에서 $a=0,\ -\sqrt{3},\ \sqrt{3}$

따라서 $\boldsymbol{a=0}$일 때 $S(a)$는 극소이면서 최소가 된다.

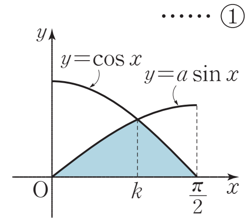
2

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$y=\cos x$와 $y=a\sin x$의 교점의 x좌표를 $k\left(0\le k\le\frac{\pi}{2}\right)$라고 하면

$\cos k=a\sin k$ …… ①



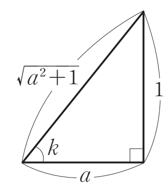
$\int_0^k a\sin x\,dx$

$\quad+\int_k^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

$=\frac{1}{2}$

에서 $\quad a\cos k+\sin k=a+\frac{1}{2}$ …… ②

①에서 $\frac{\sin k}{\cos k}=\frac{1}{a}$이므로



$\sin k=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$,

$\cos k=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$

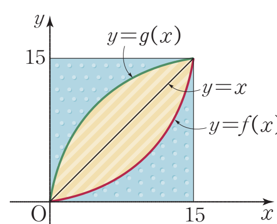
를 ②에 대입하면

$a\times\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}=a+\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{a=\frac{3}{4}}$

3

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 노란색이 칠해진 부분의 넓이는 $\frac{2}{5}\times15^2=90$



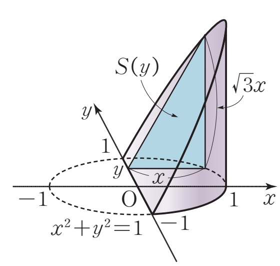
곡선 $y=g(x)$와 $y=f(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\int_0^{15}g(x)dx=\frac{1}{2}\times90+\frac{1}{2}\times15^2=\boldsymbol{\frac{315}{2}}$

4

목표| 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| $S(y)=\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$



$=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-y^2)$

$V=\int_{-1}^{1}S(y)dy$

$=\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{3}}{2}(1-y^2)\,dy$

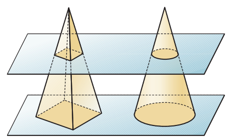
$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

교과서 188 쪽

수행 과제

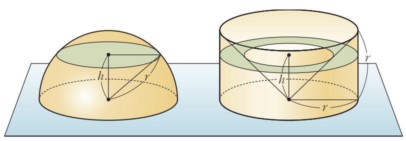
카발리에리 원리

이탈리아의 수학자 카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598~1647)는 "불가분량의 기하학"에서 평면의 넓이와 부피를 구하는 카발리에리 원리를 확립하였다.
입체도형에 관한 카발리에리 원리는 다음과 같다.



두 입체도형을 하나의 정해진 평면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이의 비가 $m : n$이면 두 입체도형의 부피의 비도 $m : n$이다.

다음 [그림 1]은 반지름의 길이가 r인 반구이고, [그림 2]는 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 r인 원기둥에서 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 r인 원뿔을 잘라 낸 것이다.



[그림 1] [그림 2]

| 과 제 | 1 [그림 1]과 [그림 2]에서 색칠된 부분은 밑면으로부터 높이가 h인 지점을 밑면과 평행인 평면으로 자른 단면이다. 이때 두 단면의 넓이를 각각 구하여 보자.

| 과 제 | 2 카발리에리 원리를 이용하여 [그림 1]과 [그림 2]의 입체도형의 부피를 구하여 보자.

| 과 제 | 3 카발리에리 원리가 성립함을 정적분을 이용하여 증명하여 보자.

교과서 189 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 여러 가지 함수의 부정적분

x^n (n은 실수)의 부정적분

(1) $n \neq -1$일 때, $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

(2) $n=-1$일 때, $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$

삼각함수의 부정적분

(1) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

(2) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

(3) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

(4) $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

지수함수의 부정적분

(1) $\int e^x dx = e^x + C$

(2) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ (단, $a>0$, $a \neq 1$)

2 치환적분법

치환적분법

미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $x=g(t)$로 놓으면

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

$\frac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$$

3 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

4 여러 가지 함수의 정적분

정적분의 치환적분법

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고 $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$이면

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

정적분의 부분적분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하고, $f'(x)$, $g'(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

5 넓이

곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|dx$$

곡선과 y축 사이의 넓이

함수 $x=g(y)$가 구간 $[c, d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_c^d |g(y)|dy$$

두 곡선 사이의 넓이

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

6 부피

구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체의 부피 V는

$$V=\int_a^b S(x)dx \text{ (단, } S(x)\text{는 구간 } [a, b]\text{에서 연속)}$$

| 용어와 기호 | 치환적분법, 부분적분법

수행 과제

● 수행 과제 의도

카발리에리 원리를 이해하고 이것이 정적분으로 설명됨을 알기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

[그림 1]은 반지름의 길이가 r인 반구, [그림 2]는 반지름의 길이가 r이고 높이가 r인 직원기둥을 나타내는데, 밑면이 직원기둥의 밑면이고, 꼭짓점이 이 직원기둥의 밑면의 중심에 있는 원뿔을 이 직원기둥에서 제거한 상태를 나타내고 있다. 두 입체를 밑면에서 높이 h에 위치한 밑면과 평행인 평면으로 자른다. 이때, 단면은 각각 원판과 원환이 되고, 카발리에리 원리에 의해 단면의 넓이는 $\pi(r^2-h^2)$으로 동일하다.

과제 2 _풀이

[그림 1]의 입체도형의 부피는 구의 부피의 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi r^3}$

[그림 2]의 입체도형의 부피는

(직원기둥의 부피)−(원뿔의 부피)이므로

$\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi r^3}$

두 입체도형을 밑면과 평행하게 자르면 단면의 넓이가 서로 같으므로 카발리에리의 원리에 의해 두 공간도형의 부피는 같다.

과제 3 _풀이

[그림 1]과 [그림 2]의 부피를 V라 하면

$V = \int_0^r \pi(r^2-h^2)dh$

$= \pi\left[r^2h - \frac{1}{3}h^3\right]_0^r = \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi r^3}$

교과서 190 쪽

대 / 단 / 원 평가 문제

Ⅳ. 적분법

선택형

1 함수 $f(x)=\frac{x+1}{x}$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 부정적분 $\int g(x)dx$를 구하면?

① $\ln(x-1)+C$ ② $\ln|x-1|+C$
③ $\ln(x+1)+C$ ④ $\ln|x+1|+C$
⑤ $x+\ln|x|+C$

2 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x, y)에서 접선의 기울기가 $\cos x-\sin x$라고 한다. 이 곡선이 원점을 지날 때, $f(\pi)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

3 함수 $f(x)=\int(1-\cos x)^2\sin x\,dx$에 대하여 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$일 때, $f(\pi)$의 값은?

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3
④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

4 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$일 때, 함수

$$f(x)=-1+\sin x-\sin^2 x+\sin^3 x-\cdots$$

의 부정적분 $F(x)$를 구하면?

① $\tan x+\sec x+C$
② $\sec x-\tan x+C$
③ $\cot x+\sec x+C$
④ $\sec x-\cot x+C$
⑤ $\cot x+\csc x+C$

5 정적분 $\int_0^1|e^x-e^a|dx$의 값을 $f(a)$라고 할 때, $f(a)$가 최소가 되게 하는 a의 값은? (단, $0\le a\le 1$)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

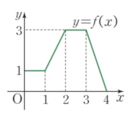
6 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\int_0^x t\sin(x-t)dt$$

일 때, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

7 $0\le x\le 4$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 정적분 $\int_0^1 f(2x+1)dx$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

8 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)g(x)dx$의 값은?

$f'(x)=g(x)$
$f(0)=3,\ f(2)=5$

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

대 / 단 / 원 평가 문제

1

목표 | 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 $y=\frac{x+1}{x}$이라 하고 x에 대하여 정리하면

$x=\frac{1}{y-1}$ 따라서 $g(x)=\frac{1}{x-1}$

$\int g(x)dx=\int\frac{1}{x-1}dx=\ln|x-1|+C$ 답 ②

2

목표 | 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 $f'(x)=\cos x-\sin x$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\sin x+\cos x+C$

$f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=1+C=0$, $C=-1$

$f(x)=\sin x+\cos x-1$이므로 $f(\pi)=-2$ 답 ①

3

목표 | 치환적분법을 이용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 $1-\cos x=t$로 놓으면 $\sin x=\frac{dt}{dx}$

$$f(x)=\int(1-\cos x)^2\sin x\,dx$$
$$=\int t^2dt=\frac{1}{3}t^3+C$$
$$=\frac{1}{3}(1-\cos x)^3+C$$

이때, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\right)^3+C=0$에서

$C=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(1-\cos x)^3-\frac{1}{3}$이므로

$f(\pi)=\frac{1}{3}\cdot 2^3-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$ 답 ①

4

목표 | 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 $f(x)=\frac{-1}{1-(-\sin x)}=\frac{-1}{1+\sin x}$

$$=\frac{-1(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{\sin x-1}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\sin x}{\cos x}\sec x-\sec^2 x=\tan x\sec x-\sec^2 x$$

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(\tan x\sec x-\sec^2 x)dx$$
$$=\sec x-\tan x+C$$ 답 ②

5

목표 | 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 $f(a)=\int_0^1|e^x-e^a|dx$

$$=\int_0^a(-e^x+e^a)dx+\int_a^1(e^x-e^a)dx$$
$$=\Big[-e^x+e^ax\Big]_0^a+\Big[e^x-e^ax\Big]_a^1$$
$$=(2a-3)e^a+e+1$$

$f'(a)=2e^a+(2a-3)e^a=(2a-1)e^a$

$f'(a)=0$에서 $a=\frac{1}{2}$ 답 ⑤

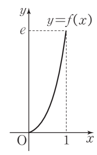
교과서 **191** 쪽

[해답 p.**220**]

9 곡선 $y=\sqrt{x}$와 이 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서 그은 접선 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ 1　④ $\frac{4}{3}$　⑤ $\frac{5}{3}$

10 오른쪽 그림은 함수 $f(x)=xe^x\ (0\le x\le 1)$의 그래프이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_0^e g(x)dx$의 값은?



① $e-1$　② $e-2$　③ $2e-1$　④ $2e-2$　⑤ $2e-3$

11 어떤 용기에 물을 넣으면 깊이가 $x(0\le x\le \pi)$일 때, 수면은 반지름의 길이가 $\sqrt{x\sin x}$인 원이라고 한다. 물의 깊이가 π일 때 용기에 담긴 물의 부피는?

① π　② 2π　③ $\frac{1}{2}\pi^2$　④ π^2　⑤ π^2+1

12 밑면의 반지름의 길이가 a, 높이가 $2a$인 원기둥이 있다. 밑면의 중심을 지나고 밑면과 45°인 각을 이루는 평면으로 이 직원기둥을 자를 때 생기는 두 입체도형 중에서 작은 것의 부피는?

① $\frac{1}{3}a^3$　② $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$　④ $\frac{2}{3}a^3$　⑤ a^3

서답형

13 $\int_1^4 \frac{2}{x^2+2x}dx=\ln a$를 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.

14 함수 $f(t)=\int_0^{t-1}(x-t)e^x dx$의 최댓값을 구하여라.

|서|술|형|

15 곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln 3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 지름의 길이가 4인 반원을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 지름 AB에 수직인 평면으로 잘라 생기는 단면이 정사각형일 때, 입체도형의 부피를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

6

목표| 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(t)=t,\ g'(t)=\sin(x-t)$라 하면

$f'(t)=1,\ g(t)=\cos(x-t)$

$$f(x)=\int_0^x t\sin(x-t)dt$$
$$=\Big[t\cos(x-t)\Big]_0^x-\int_0^x\cos(x-t)dt$$
$$=x+\Big[\sin(x-t)\Big]_0^x=x-\sin x$$

이때 $f'(x)=1-\cos x$이므로 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

답 ③

7

목표| 치환적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $2x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{t-1}{2}$이므로

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 f(2x+1)dx=\int_1^3 f(t)\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int_1^3 f(t)dt$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_1^2 f(t)dt+\int_2^3 f(t)dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1\times1+\frac{1}{2}\times1\times2\right)+(1\times3)\right\}=\frac{5}{2}$$

답 ③

8

목표| 부분적분법을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\int_0^2 f(x)g(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 2f(x)f'(x)dx$

$$=\frac{1}{2}\Big[\{f(x)\}^2\Big]_0^2=\frac{1}{2}\Big[\{f(2)\}^2-\{f(0)\}^2\Big]$$
$$=\frac{1}{2}(5^2-3^2)=8$$

답 ④

9

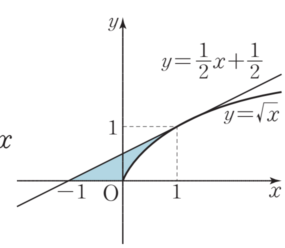
목표| 곡선과 직선 사이에 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

따라서 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)dx-\int_0^1\sqrt{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x\right]_{-1}^1-\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{3}$$



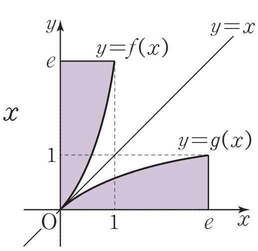
답 ①

10

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로

$$\int_0^e g(x)dx=\int_0^e f(y)dy$$



그런데 x축, y축 및 두 직선

$x=1$, $y=e$로 둘러싸인 직사각형의 넓이는 e이므로

$$\int_0^e f(y)dy = e - \int_0^1 f(x)dx = e - \left(\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right)$$

$$= e - \{e-(e-1)\} = e-1$$

따라서 $\int_0^e g(x)dx = e-1$ 답 ①

11

목표| 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x) = \pi(\sqrt{x\sin x})^2 = \pi x \sin x$

구하는 부피 V는 $V = \int_0^\pi \pi x \sin x$

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$라고 하면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$

$$V = \pi\int_0^\pi x\sin x\,dx$$

$$= \pi\left\{\left[-x\cos x\right]_0^\pi - \int_0^\pi(-\cos x)dx\right\} = \pi^2$$

답 ④

12

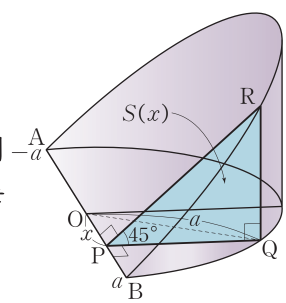
목표| 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림과 같이

$\overline{OP}=x$ $(0\le x\le a)$라고 하면

$\overline{PQ}=\overline{QR}=\sqrt{a^2-x^2}$

따라서 주어진 입체를 점 P에서 선분 AB에 수직하게 자른 단면의 넓이 $S(x)$는



$S(x) = \frac{1}{2}(a^2-x^2)$

$$\therefore V = 2\int_0^a S(x)dx = 2\int_0^a \frac{1}{2}(a^2-x^2)dx = \frac{2}{3}a^3$$

답 ④

13

목표| 분수함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{2}{x^2+2x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$ 이므로

$$\int_1^4 \frac{2}{x^2+2x}dx = \int_1^4\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \Big[\ln|x| - \ln|x+2|\Big]_1^4 = \ln 2$$

따라서 $a=2$ 답 2

14

목표| 미분과 적분과의 관계를 이용하여 최댓값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(t) = \int_0^{t-1}(x-t)e^x\,dx$

$$= \left[(x-t)e^x\right]_0^{t-1} - \int_0^{t-1}e^x\,dx = -2e^{t-1}+t+1$$

양변을 t에 대하여 미분하면 $f'(t) = -2e^{t-1}+1$

$f'(t)=0$에서 $t=1-\ln 2$

$t=1-\ln 2$에서 함수 $f(t)$의 값은 극대이면서 최대가 되므로 최댓값은

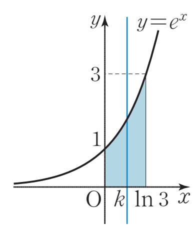
$f(1-\ln 2) = -2e^{-\ln 2}+1-\ln 2+1 = 1-\ln 2$

답 $1-\ln 2$

15

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 곡선 $y=e^x$과 x축, y축 및 직선 $x=\ln 3$으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$$\int_0^{\ln 3} e^x dx = \left[e^x\right]_0^{\ln 3} = 3-1 = 2$$

직선 $x=k$가 도형의 넓이를 이등분하므로 $\int_0^k e^x dx = \left[e^x\right]_0^k = e^k - 1 = 1$

따라서 $k=\ln 2$

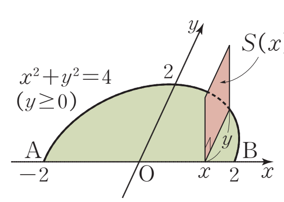
채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	도형의 넓이 구하기	40%
	이등분된 도형의 넓이를 식으로 나타내기	40%
답 구하기	상수 k의 값 구하기	20%

16

목표| 입체도형의 부피를 구할 수 있게 한다.

풀이| 좌표평면의 x축 위에 지름 AB를 놓은 다음 x축에 수직인 평면으로 이 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라고 하면



$S(x) = y^2 = 4-x^2$

$$V = \int_{-2}^2 S(x)dx = \int_{-2}^2(4-x^2)dx$$

$$= 2\int_0^2(4-x^2)dx = 2\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	단면의 넓이 $S(x)$ 구하기	40%
	(부피)$=\int_{-2}^2 S(x)$로 나타내기	30%
답 구하기	부피 구하기	30%

M+ Science

수 학 ✚ 과 학

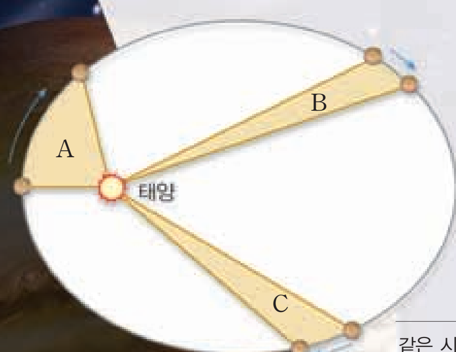
케플러의 적분

기원전 200년대 아르키메데스의 등장으로부터 17세기에 이르기까지 여러 학자들이 곡선에 둘러싸인 영역의 넓이를 구하는 방법, 이른바 적분법을 연구하여 왔다. 원이나 포물선 등 특정한 곡선에 관해서는 넓이를 구하는 방법이 발견되어 있었지만, 어느 곡선에서나 적용할 수 있는 일반적인 방법은 발견되지 않았다.

만약 넓이를 구하고 싶다면, 넓이를 구하고 싶은 영역을 곡선의 모양에 맞추어 가느다란 도형으로 분할하고 많은 계산을 해야만 했다. 이 방법은 계산이 매우 번거롭고, 엄밀하게 말하면 정확하지 않았다.

넓이를 구할 때 무한히 작은 부분으로 나누고 그것을 더한다는 아르키메데스의 적분에 대한 발상을 천문학에 응용한 사람이 독일의 천문학자 케플러(Kepler, J. ; 1571~1630)였다. 주로 그는 천문학에서 행성의 세 가지 운동 법칙의 발견으로 기억되고 있지만, 수학에서도 여러 가지 업적을 남겼다.

케플러

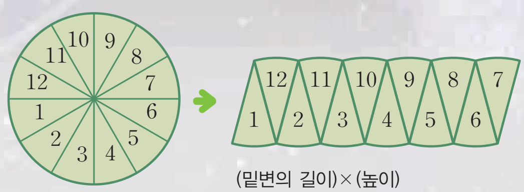


같은 시간 동안 행성이 태양 주위를 돌면서 만드는 부채꼴 A, B, C의 넓이는 서로 같다.

1604년 무렵 케플러는 스승이었던 천문학자 티코(Tycho, B. ; 1546~1601)가 남긴 막대한 화성 관측 기록을 바탕으로, 화성의 궤도를 정확하게 계산할 수 있는 방법을 여러 가지로 찾고 있었다.

그가 시행착오 끝에 이른 것이 현재 '케플러의 제2법칙'으로 알려져 있다. 그것은 '같은 시간에 행성과 태양을 연결하는 선분이 만드는 부채꼴의 넓이는 서로 같다'는 것이다.

케플러는 시행착오와 막대한 계산을 거쳐 이 결론을 얻었다. 현재와 같은 적분법이 탄생하기 전에 케플러는 태양과 화성을 잇는 직선이 지나면서 만드는 부채꼴의 넓이를 아르키메데스처럼 무한히 작은 삼각형으로 나누었다가 더하는 방법으로 계산하였다.



(밑변의 길이)×(높이)

=(원주의 반)×(반지름)

$=\pi r\times r=\pi r^2$

그는 오른쪽 그림과 같이 원을 여러 개의 부채꼴로 분할한 다음 이들을 번갈아 뒤집어 붙여서 평행사변형 모양을 만들어 원의 넓이를 계산하였다.

케플러의 아이디어가 바로 적분이기는 하지만 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하는 적분법의 일반적인 계산 방법을 개발한 것은 아니었으므로 이 시점에서 적분법이 완성되었다고는 할 수 없다.

그러나 케플러의 이러한 업적은 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)이나 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)의 미분적분학이 꽃을 피우기 전에 카발리에리와 토리첼리(Torricelli, E. ; 1608~1647) 등에게 영감을 주었고, 적분이 발전해 나아가는 데 중요한 밑바탕이 되었다.

삼각함수표

각	라디안	sin	cos	tan
0°	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0524	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2094	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4189	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5411	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000

각	라디안	sin	cos	tan
45°	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.8029	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.8203	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.8378	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.8552	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.8727	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.8901	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.9076	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.9250	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.9425	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.9599	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.9774	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.9948	0.8387	0.5446	1.5399
58°	1.0123	0.8480	0.5299	1.6003
59°	1.0297	0.8572	0.5150	1.6643
60°	1.0472	0.8660	0.5000	1.7321
61°	1.0647	0.8746	0.4848	1.8040
62°	1.0821	0.8829	0.4695	1.8807
63°	1.0996	0.8910	0.4540	1.9626
64°	1.1170	0.8988	0.4384	2.0503
65°	1.1345	0.9063	0.4226	2.1445
66°	1.1519	0.9135	0.4067	2.2460
67°	1.1694	0.9205	0.3907	2.3559
68°	1.1868	0.9272	0.3746	2.4751
69°	1.2043	0.9336	0.3584	2.6051
70°	1.2217	0.9397	0.3420	2.7475
71°	1.2392	0.9455	0.3256	2.9042
72°	1.2566	0.9511	0.3090	3.0777
73°	1.2741	0.9563	0.2924	3.2709
74°	1.2915	0.9613	0.2756	3.4874
75°	1.3090	0.9659	0.2588	3.7321
76°	1.3265	0.9703	0.2419	4.0108
77°	1.3439	0.9744	0.2250	4.3315
78°	1.3614	0.9781	0.2079	4.7046
79°	1.3788	0.9816	0.1908	5.1446
80°	1.3963	0.9848	0.1736	5.6713
81°	1.4137	0.9877	0.1564	6.3138
82°	1.4312	0.9903	0.1392	7.1154
83°	1.4486	0.9925	0.1219	8.1443
84°	1.4661	0.9945	0.1045	9.5144
85°	1.4835	0.9962	0.0872	11.4301
86°	1.5010	0.9976	0.0698	14.3007
87°	1.5184	0.9986	0.0523	19.0811
88°	1.5359	0.9994	0.0349	28.6363
89°	1.5533	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.5708	1.0000	0.0000	∞

● 수학 용어

용어	외국어	한자
〈ㄱ〉		
가정	hypothesis	假定
감소	decreasing	減少
거듭제곱근	radical root	
결론	conclusion	結論
(집합의) 결합법칙	associative law	結合法則
계수	coefficient	係數
계승	factorial	階乘
곱의 법칙	multiplication principle	
공간벡터	space vector	
공간좌표	coordinates in space	空間座標
공비	common ratio	公比
공역	codomain	共域
공집합	empty set	空集合
공차	common difference	公差
교선	line of intersection	交線
교집합	intersection	交集合
(집합의) 교환법칙	commutative law	交換法則
구간	interval	區間
구분구적법	quadrature by parts	區分求積法
귀납적 정의	inductive definition	歸納的定義
귀류법	reduction to absurdity	歸謬法
극값	extreme values	
극대	local maximum	極大
극댓값	local maximum	
극소	local minimum	極小
극솟값	local minimum	
극한(값)	limit (value)	極限
근	root	根
근의 공식	quadratic formula	根— 公式
근호	radical sign	根號
급수	series	級數
급수의 합	sum of series	級數— 合
기댓값	expected value	
기울기	slope	
〈ㄴ〉		
나머지정리	remainder theorem	
내분	internal division	內分

용어	외국어	한자
내적	inner product	內積
〈ㄷ〉		
다항식	polynomial	多項式
다항함수	polynomial function	多項函數
단위벡터	unit vector	
단항식	monomial	單項式
닫힌 구간	closed interval	
대우	contraposition	對偶
대응	correspondence	對應
대입	substitution	代入
대칭이동	reflection	對稱移動
덧셈정리	addition theorem	
도함수	derivatives	導函數
독립	independence	獨立
독립시행	independent trials	獨立試行
동경	radius	動徑
동류항	similar term	同類項
두 점 사이의 거리	distance between two points	
드모르간의 법칙	De Morgan's law	
등비급수	geometric series	等比級數
등비수열	geometric sequence	等比數列
등비중항	geometric means	等比中項
등차수열	arithmetic sequence	等差數列
등차중항	arithmetic means	等差中項
〈ㄹ〉		
라디안	radian	
로그	logarithm	
로그함수	logarithmic function	
롤의 정리	Rolle's theorem	
〈ㅁ〉		
매개변수	parameter	媒介變數
명제	proposition	命題
모분산	population variance	母分散
모비율	population ratio	母比率
모집단	population	母集團
모평균	population mean	母平均
모표준편차	population standard deviation	母標準偏差
무리수	irrational number	無理數

용어	외국어	한자
무리식	irrational expression	無理式
무리함수	irrational function	無理函數
무한대	infinity	無限大
미분가능	differentiable	微分可能
미분계수	derivative	微分係數
미적분의 기본 정리	fundamental theorem of calculus	微積分 - 基本定理
미정계수법	method of undetermined coefficients	未定係數法
미지수	unknown	未知數
(로그의) 밑	base	
〈ㅂ〉		
반닫힌(반열린) 구간	half closed(open) interval	
발산	divergence	發散
방향벡터	direction vector	
배반사건	exclusive events	排反事件
법선벡터	normal vector	
벡터	vector	
벡터의 성분	component of vector	
벡터의 크기	norm of vector	
벤 다이어그램	Venn diagram	
변곡점	point of inflection	變曲點
복소수	complex number	複素數
부등식	inequality	不等式
부분적분법	integration by parts	部分積分法
부분집합	subset	部分集合
부분합	partial sum	部分合
부정	negation	否定
부정적분	indefinite integral	不定積分
분모의 유리화	rationalization of denominator	分母— 有理化
(집합의) 분배법칙	distributive law	分配法則
불연속	discontinuous	不連續
〈ㅅ〉		
사이값 정리	intermediate value theorem	
사인	sine	
사인함수	sine function	
삼각비	trigonometric ratio	三角比
삼각함수	trigonometric function	三角函數
삼수선의 정리	theorem of three perpendiculars	三垂線— 定理
상수함수	constant function	常數函數

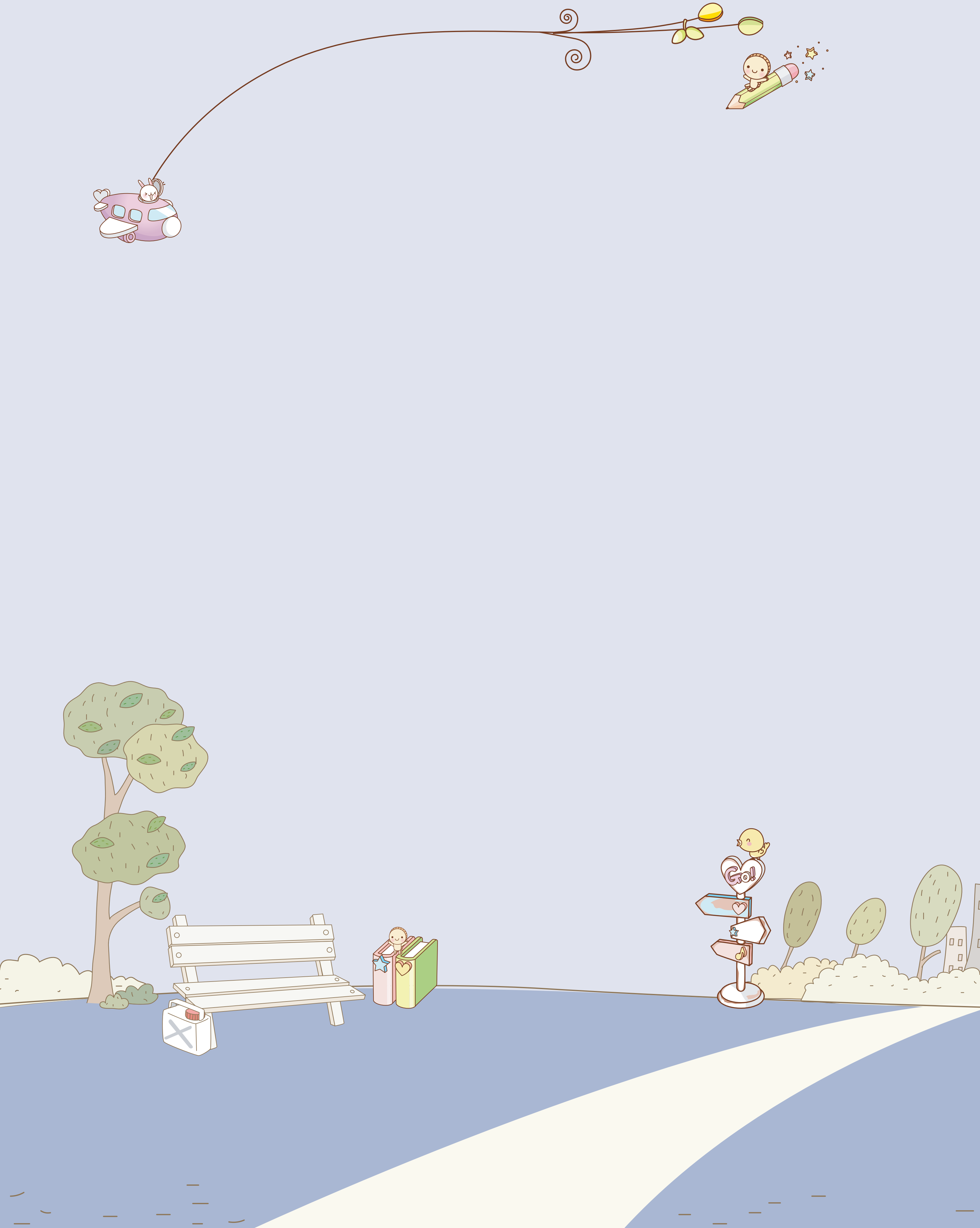
용어	외국어	한자
상수항	constant term	常數項
상용로그	common logarithm	
(집합의) 서로소	disjoint	
수렴	convergence	收斂
수열	sequence	數列
수학적 귀납법	mathematical induction	數學的歸納法
수학적 확률	mathematical probability	數學的確率
순간변화율	instantaneous rate of change	瞬間變化率
순서쌍	ordered pair	順序雙
순열	permutation	順列
시점	initial point	始點
시초선	ray	始初線
시행	trial	試行
식의 값	numerical value of expression	
신뢰구간	confidence interval	信賴區間
신뢰도	confidence coefficient	信賴度
실근	real root	實根
실수	real number	實數
실수배	real number multiple	實數倍
실수부분	real part	實數部分
쌍곡선	hyperbola	雙曲線
쌍곡선의 꼭짓점	vertex of hyperbola	
쌍곡선의 점근선	asymptotic line of hyperbola	雙曲線— 漸近線
쌍곡선의 주축	principal axis of hyperbola	雙曲線— 主軸
쌍곡선의 중심	center of hyperbola	雙曲線— 中心
쌍곡선의 초점	focus of hyperbola	雙曲線— 焦點
〈ㅇ〉		
x절편	x-intercept	
x좌표	x-coordinate	
x축	x-axis	
여사건	complementary event	餘事件
여집합	complement	餘集合
역	converse	逆
역함수	inverse function	逆函數
연립일차방정식	simultaneous linear equations	聯立一次方程式
연립일차부등식	simultaneous linear inequalities	聯立一次不等式
연속	continuous	連續
연속함수	continuous function	連續函數

용어	외국어	한자
연속확률변수	continuous random variable	連續確率變數
열린 구간	open interval	
영벡터	zero vector	
y절편	y-intercept	
y좌표	y-coordinate	
y축	y-axis	
완전제곱식	perfect square(expression)	
외분	external division	外分
우극한	right-handed limit	右極限
원소	element	元素
원순열	circular permutation	圓順列
원점	origin	原點
위치벡터	position vector	
유리식	rational expression	有理式
유리함수	rational function	有理函數
음함수	implicit function	陰函數
이계도함수	second order derivatives	二階導函數
이면각	dihedral angle	二面角
이면각의 면	faces of a dihedral angle	二面角— 面
이면각의 변	edge of dihedral angle	二面角— 邊
이면각의 크기	measure of a dihedral angle	
이산확률변수	discrete random variable	離散確率變數
이차곡선	quadratic curve	二次曲線
이차방정식	quadratic equation	二次方程式
이차함수	quadratic function	二次函數
이항	transposition	移項
이항계수	binomial coefficient	二項係數
이항분포	binomial distribution	二項分布
이항정리	binomial theorem	二項定理
인수	factor	因數
인수분해	factorization	因數分解
인수정리	factor theorem	因數定理
일대일 대응	one to one correspondence	一對一對應
일대일함수	one to one function	一對一函數
일반각	general angle	一般角
일반항	general term	一般項
일차방정식	linear equation	一次方程式
일차부등식	linear inequality	一次不等式

용어	외국어	한자
일차함수	linear function	一次函數
임의추출	random sampling	任意抽出
〈ㅈ〉		
자연로그	natural logarithm	
자연수의 분할	partitions of natural number	自然數— 分割
적분상수	integral constant	積分常數
전개	expansion	展開
전개식	expansion	展開式
전수조사	total inspection	全數調査
전체집합	universal set	全體集合
절대부등식	absolute inequality	絕對不等式
정규분포	normal distribution	正規分布
정리	theorem	定理
정사영	orthogonal projection	正射影
정의	definition	定義
정의역	domain	定義域
정적분	definite integral	定積分
제곱근	square root	
조건	condition	條件
조건부확률	conditional probability	條件附確率
조립제법	synthetic division	組立除法
조합	combination	組合
종속	dependence	從屬
종점	terminal point	終點
좌극한	left-handed limit	左極限
좌표	coordinate	座標
좌표공간	coordinate space	座標空間
좌표축	coordinate axis	座標軸
좌표평면	coordinate plane	座標平面
주기	period	週期
주기함수	periodic function	週期函數
중근	multiple root	重根
중복순열	repeated permutation	重複順列
중복조합	repeated combination	重複組合
중점	midpoint	中點
증가	increasing	增加
증명	proof	證明
증분	increment	增分

용어	외국어	한자
지수함수	exponential function	指數函數
진리집합	truth set	眞理集合
진부분집합	proper subset	眞部分集合
진수	antilogarithm	眞數
집합	set	集合
집합의 분할	partition of a set	集合一分割
〈ㅊ〉		
차수	degree	次數
차집합	difference set	差集合
최대 · 최소 정리	maximum−minimum theorem	最大最小定理
최댓값	absolute maximum	最大
최솟값	absolute minimum	最小
추정	estimation	推定
충분조건	sufficient condition	充分條件
치역	range	値域
치환적분법	integration by substitution	置換積分法
〈ㅋ〉		
켤레복소수	complex conjugates	
코사인	cosine	
코사인함수	cosine function	
큰 수의 법칙	law of large numbers	
〈ㅌ〉		
타원	ellipse	楕圓
타원의 꼭짓점	vertex of ellipse	
타원의 단축	minor axis of ellipse	楕圓一 短軸
타원의 장축	major axis of ellipse	楕圓一 長軸
타원의 중심	center of ellipse	楕圓一 中心
타원의 초점	focal point of ellipse	楕圓一 焦點
탄젠트	tangent	
탄젠트함수	tangent function	
통계적 확률	statistical probability	統計的 確率
〈ㅍ〉		
파스칼의 삼각형	Pascal’s triangle	
판별식	discriminant	判別式
평균값 정리	mean value theorem	
평균변화율	mean rate of change	平均變化率
평면벡터	plane vector	
평행이동	translation	平行移動

용어	외국어	한자
포물선	parabola	抛物線
포물선의 꼭짓점	vertex of parabola	
포물선의 준선	directrix of parabola	抛物線一 準線
포물선의 초점	focal point of parabola	抛物線一 焦點
포물선의 축	axis of parabola	抛物線一 軸
표본	sample	標本
표본분산	sample variance	標本分散
표본비율	sample rate	標本比率
표본조사	sample survey	標本調査
표본평균	sample mean	標本平均
표본표준편차	sample standard deviation	標本標準偏差
표준정규분포	standard normal distribution	標準正規分布
표준화	standardization	標準化
피타고라스 정리	Pythagorean theorem	
필요조건	necessary condition	必要條件
필요충분조건	necessary and sufficient condition	必要充分條件
〈ㅎ〉		
함수의 그래프	graph of a function	
합성함수	composite function	合成函數
합의 법칙	addition principle	
합집합	union	合集合
항	term	項
항등식	identity	恒等式
항등함수	identity function	恒等函數
해	root	解
허근	imaginary root	虛根
허수	imaginary number	虛數
허수단위	imaginary unit	虛數單位
허수부분	imaginary part	虛數部分
호도법	circular measure	弧度法
확률밀도함수	probability density function	確率密度函數
확률변수	random variable	確率變數
확률분포	probability distribution	確率分布
확률질량함수	probability mass function	確率質量函數


Go!

집필진 소개

신항균
현 서울교육대학교 총장

이광연
현 한서대학교 교수

박세원
현 신경대학교 교수

신범영
현 청담중학교 교감

이계세
현 경기도학생교육원 교육연구사

김정화
현 서울고등학교 교사

박문환
현 인천인제고등학교 교사

윤정호
현 대구과학고등학교 교사

박상의
현 장충고등학교 교사

서원호
현 청원고등학교 교감

전제동
현 창원중앙고등학교 교사

이동흔
현 숭문고등학교 교사

만든 사람들
개발 책임 김경수
편집 윤준원, 최윤정
아트 디렉터 허영인
표지 디자인 김의수
본문 디자인 유지인
컷 김상준, 이도훈
조제판 벽호미디어

고등학교 미적분II 교사용 지도서

2015. 3. 1. 초판 발행 정가 원

지은이 신항균 외 11인
발행인 (주)지학사 서울시 마포구 신촌로6길 5
인쇄인 (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43
내용 관련 문의 (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의 (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내 누리집 주소 www.ktbook.com 전화 031-8071-7981~4 (사)한국검인정교과서
ISBN 978-89-05-04258-5 53410

고|등|학|교 미적분 Ⅱ

53410

ISBN 978-89-05-04258-5